

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
 Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών  
**ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος**  
**Χειμερινό Εξάμηνο 2015**  
**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής**

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/11/2015

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/11/2015

**Άσκηση 1.** Η είσοδος σε ένα *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα είναι

$$x[n] = u[-n - 1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (1)$$

Ο μετασχ. Ζ της εξόδου του συστήματος είναι

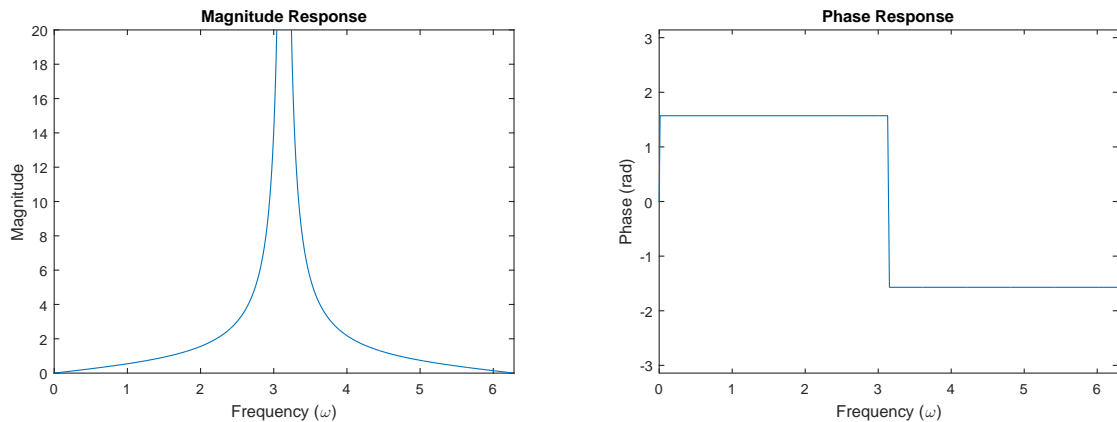
$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)} \quad (2)$$

(α) Βρείτε το  $H(z)$ . Μην ξεχάσετε το πεδίο σύγκλισης!

(β) Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του  $Y(z)$ ;

(γ) Βρείτε το  $y[n]$ .

(δ) Αν το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του συστήματος  $H(e^{j\omega})$  σας δίνονται στο Σχήμα (1) στο διάστημα  $[0, 2\pi)$  βρείτε προσεγγιστικά την έξοδο του συστήματος για είσοδο



Σχήμα 1: Φασματικές Αποκρίσεις συστήματος  $H(e^{j\omega})$  Άσκησης 1.

(α)  $x[n] = 2 \cos(\pi n + \pi/3)$

(β)  $x[n] = \cos(\pi n/4 - \pi/6)$

Απ: α)  $(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1}), |z| > 1$

β)  $|z| > 1$

γ)  $y[n] = -1/3(1/2)^n u[n] + 1/3(-1)^n u[n]$

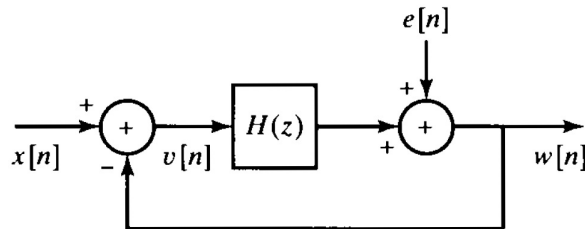
**Άσκηση 2.** Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο  $x[n]$  και έξοδο  $y[n]$  που ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1] \quad (3)$$

Βρείτε όλες τις πιθανές τιμές του  $h[0]$ .

Απ:  $h[0] = 0, 1/3, 1, 2/3$

**Άσκηση 3.** Στο Σχήμα (2), το  $H(z)$  αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς ενός *αιτιατού* ΓΧΑ συστήματος.



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 3.

(α) Χρησιμοποιώντας μετασχ.  $Z$  των σημάτων που φαίνονται στο σχήμα, βρείτε μια έκφραση για το  $W(z)$  της μορφής

$$W(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)E(z) \quad (4)$$

όπου τα  $H_1(z), H_2(z)$  είναι συναρτήσεις του  $H(z)$ .

(β) Για την ειδική περίπτωση όπου  $H(z) = z^{-1}/(1 - z^{-1})$ , βρείτε τα  $H_1(z), H_2(z)$ .

(γ) Είναι το σύστημα  $H(z)$  ευσταθές; Είναι τα συστήματα  $H_1(z), H_2(z)$  ευσταθή;

**Άσκηση 4.** Υπολογίστε τον μετασχ.  $Z$  του σήματος

$$x[n] = u[n] - u[n-5] \quad (5)$$

και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά του μετασχηματισμού.

(α) Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης;

(β) Ποιά τιμή έχει το  $X(z)$  όταν  $z \rightarrow \infty$ ;

(γ) Αν μετακινήσω το σήμα δεξιά κατά  $n_0 = 1$ , δηλ. πάρω το  $x[n-1]$ , πώς αλλάζει η κατανομή των πόλων και των μηδενικών;

(δ) Ποιά είναι τώρα η τιμή του  $X(z)$  όταν  $z \rightarrow \infty$ ;

(ε) Αν μετακινήσω το σήμα αριστερά κατά  $n_0 = 1$ , δηλ. πάρω το  $x[n+1]$ , πώς αλλάζει η κατανομή των πόλων και των μηδενικών;

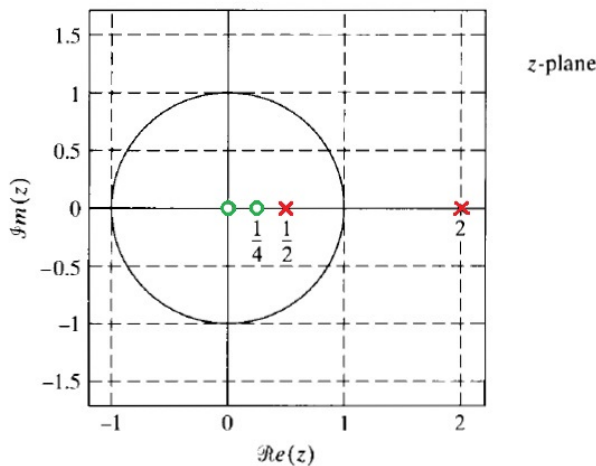
(ς) Ποιά είναι τώρα η τιμή του  $X(z)$  όταν  $z \rightarrow \infty$ ;

(ζ) Αν μετακινήσω το σήμα δεξιά κατά  $n_0 > 0$ , δηλ. πάρω το  $x[n-n_0]$ , πώς αλλάζει η κατανομή των πόλων και των μηδενικών;

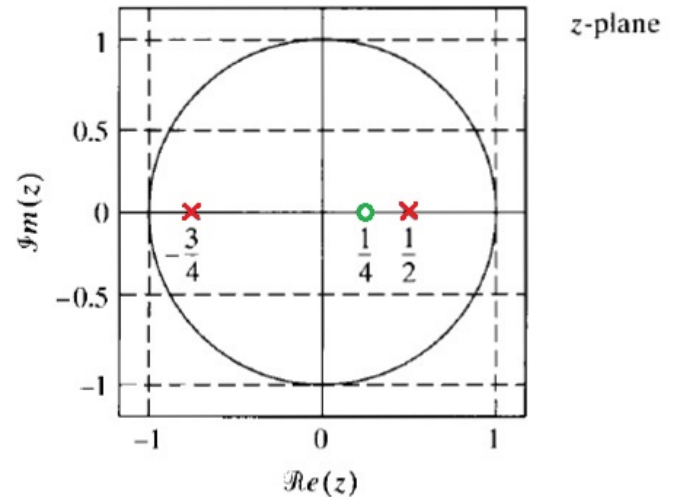
(η) Αν μετακινήσω το σήμα αριστερά κατά  $n_0 > 0$ , δηλ. πάρω το  $x[n+n_0]$ , πώς αλλάζει η κατανομή των πόλων και των μηδενικών;

(9) Ποιό γενικότερο “κανόνα” σας δίνουν οι απαντήσεις στα δυο παραπάνω ερωτήματα ;

**Άσκηση 5.** Το σήμα  $y[n]$  είναι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση  $h[n]$  για μια είσοδο  $x[n]$ . Σε όλο το πρόβλημα, υποθέστε ότι η  $y[n]$  είναι ευσταθής ακολουθία, και ότι έχει μετασχ. Ζ  $Y(z)$  με το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος (3α). Το σήμα  $x[n]$  είναι ευσταθές και έχει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος (3β).



(α) Σχήμα Άσκησης 4α.



(β) Σχήμα Άσκησης 4β.

Σχήμα 3: Σχήματα Άσκησης 4.

- (α) Ποιά είναι η περιοχή σύγκλισης του  $Y(z)$ ;
- (β) Είναι το  $y[n]$  δεξιόπλευρο, αριστερόπλευρο, ή αμφίπλευρο ;
- (γ) Ποιά η περιοχή σύγκλισης του  $X(z)$ ;
- (δ) Είναι το  $x[n]$  αιτιατό; (δηλ. είναι  $x[n] = 0, n < 0$ );
- (ε) Ποιά είναι η τιμή του  $x[0]$ ;
- (ς) Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του  $H(z)$  και βρείτε το πεδίο σύγκλισής του.
- (ζ) Είναι το  $h[n]$  αντι-αιτιατό; (δηλ. είναι  $h[n] = 0, n > 0$ );

**Άσκηση 6.** Η αυτοσυσχετίση ενός πραγματικού σήματος  $x[n]$  ορίζεται ως

$$r_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n+k] \quad (6)$$

(α) Δείξτε ότι

$$R_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}) \quad (7)$$

(β) Αν η περιοχή σύγκλισης του  $X(z)$  είναι  $a_1 < |z| < a_2$ , ποιά είναι η περιοχή σύγκλισης του  $R_{xx}(z)$ ;

(γ) Δείξτε ότι

$$r_{xx}[n] = \frac{1}{1-a^2} \left( a^n u[n] + \left(\frac{1}{a}\right)^n u[-n-1] \right), \quad \text{για } x[n] = a^n u[n] \quad (8)$$

μέσω του αντίστροφου μετασχ. Ζ.