ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

(α')

$$x[n] = u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = -\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

Είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})} \frac{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Το $h[n]$ είναι αιτιατό άρα το $ROC_H : |z| > 1$

(β') Ο πόλος στο $z = \frac{1}{2}$ του $X(z)$ ακυρώνεται από το μηδενικό του $H(z)$ στην ίδια θέση. Άρα το ROC του $Y(z)$ πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τους εναπομείναντες περιορισμούς $|z| > \frac{1}{2}$ και $|z| > 1$. Άρα το $ROC_y : |z| > 1$

(γ')

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}},$$

αφού η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη αυτής του παρανομαστή. Άρα θα είναι

$$A = Y(z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})\Big]_{z^{-1}=2} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+z^{-1}}\Bigg]_{z^{-1}=2} = \frac{1}{3}$$

$$B = Y(z)(1-z^{-1})\Big]_{z^{-1}=-1} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg]_{z^{-1}=-1} = \frac{1}{3}$$

Οπότε $Y(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+z^{-1}}$, κι επειδή $|z| > 1$, τα επιμέρους πεδία σύγκλισης θα είναι $|z| > \frac{1}{2}$, και $|z| > 1$. Άρα

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}(-1)^n u[n]$$

(δ') (α') $y[n] = +\infty$, γιατί $|H(e^{j\pi})| \to +\infty$

(β') $y[n] \simeq 0.5cos(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) \cong \frac{1}{2}cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3})$

Άσκηση 2. Είναι

$$\begin{aligned} y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] &= x[n] - x[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \\ \overset{Z}{\longleftrightarrow} (1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}) &= X(z)(1-z^{-1}) \Longleftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}} \overset{PFE}{=} \frac{2}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Άρα

- $|z| < \frac{1}{2}$, τότε $h[n] = -\frac{2}{3}2^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \Rightarrow h[0] = 0$

- $|z| > 2$, τότε $h[n] = \frac{2}{3}2^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow h[0] = 1$
- $\frac{1}{2} < |z| < 2$, τότε $h[n] = -\frac{2}{3}2^n u[-n-1] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow h[0] = \frac{1}{3}$
- $|z| < \frac{1}{2}, |z| > 2$, τότε $h[n] = \frac{2}{3}2^n u[n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \Rightarrow h[0] = \frac{2}{3}$

Σημειώστε ότι στην τελευταία περίπτωση, ο μετασχηματισμός Z δεν υπάρχει!

Άσκηση 3.

(α΄) Είναι

$$u[n] = x[n] - w[n]$$
$$w[n] = e[n] + u[n] * h[n]$$

και κάνοντας μετασχηματισμό Z έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} U(z) = X(z) - W(z) \\ W(z) = E(z) + U(z)H(z) \end{array}\right\} \Rightarrow W(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)}X(z) + \frac{1}{1+H(z)}E(z)$$

(β΄) $H_1(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = z^{-1}$ και $H_2(z) = \frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = 1 - z^{-1}$

(γ΄) Αφού $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$, τότε έχει πόλο στο $z = 1 \Rightarrow$ ασταθές. Τα $H_1(z), H_2(z)$ είναι FIR, άρα ευσταθή εξ΄ ορισμού.

Άσκηση 4.

$$x[n] = u[n] - u[n-5] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}}z^{-5} = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$$

Πόλοι: $1 - z^{-1} = 0 \Rightarrow z = 1$
Μηδενικά: $1 - z^{-5} = 0 \Rightarrow z = e^{j\frac{2\pi k}{5}}$ για $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
Άρα 4 μηδενικά επάνω στον κύκλο και 4 πόλοι στο $z = 0$.

(α΄) $ROC_x : |z| > 0$

(β΄) Το $x[n]$ είναι αιτιατό, άρα $\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0] = 1$

(γ΄) $x[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)z^{-1} = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}z^{-1}$, δηλαδή προστίθεται ένας πόλος στο $z = 0$ κι ένα μηδενικό στο $z = +\infty$. Άρα 4 μηδενικά επάνω στον κύκλο, ένα μηδενικό στο $z = +\infty$, και 5 πόλοι στο $z = 0$.

(δ΄) Εξακολουθεί να είναι αιτιατό, άρα $\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0] = 0$, όπως αναμενόταν από το (γ) ερώτημα.

(ε΄) $x[n+1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)z^{1} = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}z$, δηλαδή προστίθεται πόλος στο $z = +\infty$ και μηδενικό στο $z = 0$. Άρα 4 μηδενικά επάνω στον κύκλο, ένα μηδενικό στο $z = 0$, που ακυρώνεται με έναν από τους 4 πόλους στο $z = 0$, άρα 4 μηδενικά επάνω στον κύκλο, 3 πόλοι στο $z = 0$ κι ένας πόλος στο $z = +\infty$.

(ϛ΄) Το σήμα ΔΕΝ είναι αιτιατό, άρα $\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1-\frac{1}{z^5}}{1-\frac{1}{z}}z = 1(+\infty) = +\infty$, όπως αναμενόταν από το (ε) ερώτημα.

(ζ΄) $x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)z^{-n_0} = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}z^{-n_0}$
Το $\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$ έχει 4 πόλους στο $z = 0$ και 4 μηδενικά επάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Ο όρος z^{-n_0} προσθέτει n_0 πόλους στο $z = 0$ και n_0 μηδενικά στο $z = +\infty$. Άρα το σήμα θα έχει:
$n_0 + 4$ πόλους στο $z = 0$
n_0 μηδενικά στο $z = +\infty$
4 μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο.

(η΄) $x[n+n_0] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z)z^{n_0} = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}z^{n_0}$. Με όμοιο συλλογισμό με παραπάνω:

$$\left.\begin{array}{l} n_0 \text{ μηδενικά στο } z=0 \\ 4 \text{ πόλοι στο } z=0 \\ n_0 \text{ πόλοι στο } z=+\infty \\ 4 \text{ μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n_0-4 \text{ μηδενικά στο } z=0 \\ n_0 \text{ πόλοι στο } z=+\infty \\ 4 \text{ μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο} \end{array}$$

(θ΄) Μετακίνηση του σήματος προς δεξιά $\Rightarrow \begin{array}{l} n_0 \text{ πόλοι στο } z=0 \\ n_0 \text{ μηδενικά στο } z=+\infty \end{array}$

Μετακίνηση του σήματος προς αριστερά $\Rightarrow \begin{array}{l} n_0 \text{ μηδενικά στο } z=0 \\ n_0 \text{ πόλοι στο } z=+\infty \end{array}$

Άσκηση 5.

(α΄) Αφού το $y[n]$ είναι ευσταθές, πρέπει να περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, άρα $ROC_y : \frac{1}{2} < |z| < 2$.

(β΄) Είναι αμφίπλευρο, αφού το ROC του είναι δακτύλιος.

(γ΄) ΤΟ $x[n]$ είναι ευσταθές, άρα $ROC_x : |z| > \frac{3}{4}$.

(δ΄) Το $x[n]$ έχει ROC που περιλαμβάνει το $+\infty$, άρα δεν έχει θετικές δυνάμεις του z, άρα είναι αιτιατό.

(ε΄) $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = 0$

(ϛ΄) Το $H(z)$ έχει μηδενικό στο $z = -\frac{3}{4}, z = 0$ και πόλους στο $z = 2$ και $z = +\infty$. Άρα $ROC_H : |z| < 2$

(ζ) Το $h[n]$ έχει ROC που περιλαμβάνει το $z = 0$ και άρα δεν περιέχει αρνητικές δυνάμεις του z, οπότε είναι αντι-αιτιατό.

Άσκηση 6.

(α΄)

$$\begin{aligned} R_{xx}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n+k]\right)z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n+k]z^{-n}\right) \qquad (\text{θέτω } m=n+k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-m}\right)z^{+k} \\ &= X(z)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{k} \\ &= X(z)X(z^{-1}) \end{aligned}$$

(β΄) Αν $a_1 < |z| < a_2$, τότε $ROC_{X(z^{-1})} : \frac{1}{a_2} < |z| < \frac{1}{a_1}$. Άρα το ROC του $R_{xx}(z)$ θα είναι ROC_R : $max\{a_1, \frac{1}{a_2}\} < |z| < min\{a_2, \frac{1}{a_1}\}$

(γ΄) Ξέρουμε ότι $x[n] = a^n u[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$.
Άρα

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} = -\frac{z^{-1}}{a-z^{-1}} = \frac{-\frac{1}{a}z^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{|a|}$$

Άρα $ROC_R : |a| < |z| < \frac{1}{|a|}, |a| < 1$.
Τέλος,

$$\begin{aligned}
R_{xx}(z) &= \frac{1}{1-az^n}\frac{(-\frac{1}{a}z^{-1})}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} = \frac{-\frac{1}{a}z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-\frac{1}{a}z^{-1})} \stackrel{PFE}{=} \\
&\stackrel{PFE}{=} \frac{1}{1-a^2}\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-a^2}\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} = \frac{1}{1-a^2}\Big(\frac{1}{1-a-z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\Big) \stackrel{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} \\
&\stackrel{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} r_{xx}[n] = \frac{1}{1-a^2}(a^n + (\frac{1}{a})^n u[-n-1])
\end{aligned}$$