

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών  
**ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος**  
**Χειμερινό Εξάμηνο 2015**  
**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής**

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/10/2015

Ημερομηνία Παράδοσης: 3/11/2015

**Άσκηση 1.** Έστω  $X(e^{j\omega})$  ο μετασχ. Fourier μιας πραγματικής ακολουθίας  $x[n]$ .

1. Δείξτε ότι αν  $x[n]$  είναι άρτια, τότε το

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X(e^{j\omega}) \cos(\omega n) d\omega \quad (1)$$

2. Δείξτε ότι αν  $x[n]$  είναι περιττή, τότε το

$$x[n] = \frac{j}{\pi} \int_0^{\pi} X(e^{j\omega}) \sin(\omega n) d\omega \quad (2)$$

**Άσκηση 2.** Αποδείξτε επαγωγικά ότι ο μετασχ. Fourier του

$$x[n] = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} a^n u[n] \quad (3)$$

είναι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^m} \quad (4)$$

όταν  $|a| < 1$ .

**Άσκηση 3.** Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με φασματική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j[(\omega/2)+\pi/4]}, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (5)$$

Βρείτε την έξοδο  $y[n]$  αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα

$$x[n] = \cos\left(\frac{15\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \quad (6)$$

**Άσκηση 4.** Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με φασματική απόκριση  $H(e^{j\omega})$  και κρουστική απόκριση  $h[n]$ .

1. Σας δίνονται τα παρακάτω τρία στοιχεία για το σύστημα:

(α) Το σύστημα είναι αιτιατό.

(β) Ισχύει

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega}) \quad (7)$$

(γ) Ο μετασχ. Fourier του  $h[n+1]$  είναι πραγματική συνάρτηση του  $\omega$ .

Δείξτε ότι η κρουσική απόκριση του συστήματος  $h[n]$  είναι πεπερασμένη διάρκειας.

2. Στα παραπάνω στοιχεία, σας δίνονται επίσης ότι

(α') Ισχύει

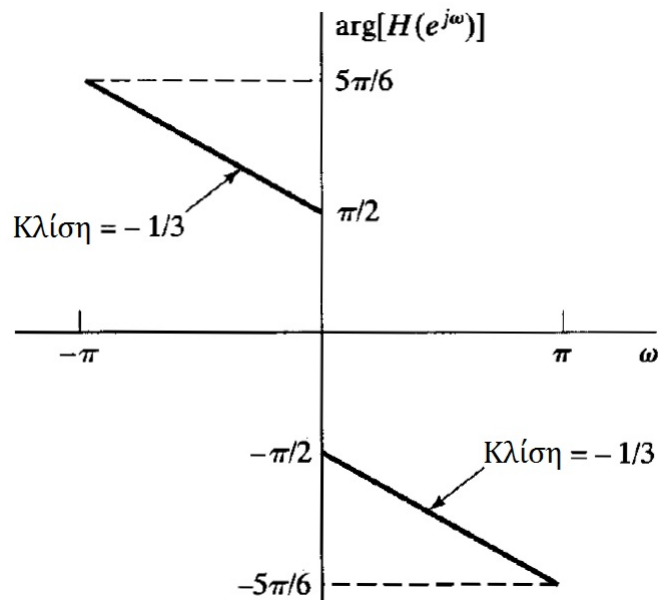
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 2 \quad (8)$$

(β') Ισχύει

$$H(e^{j\pi}) = 0 \quad (9)$$

Υπάρχει αρκετή πληροφορία στα παραπάνω ώστε να ορίσετε μονοσήμαντα το σύστημα; Αν ναι, βρείτε το  $h[n]$ . Αν όχι, αναφέρετε όσα περισσότερα μπορείτε για το  $h[n]$ .

**Άσκηση 5.** Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα με  $|H(e^{j\omega})| = 1$ , και με φάσμα φάσης είναι όπως στο Σχήμα (1).



Σχήμα 1: Φάσμα φάσης Άσκησης 5.

Αν η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (10)$$

βρείτε την έξοδο  $y[n]$ .

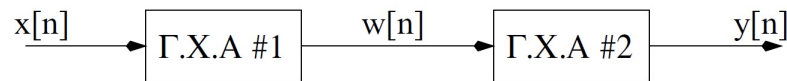
**Άσκηση 6.** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(an) = \frac{1}{a}, \quad 0 < a < 1 \quad (11)$$

όπου

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (12)$$

**Άσκηση 7.** Έστω το σύστημα του Σχήματος (2) που αποτελείται από δυο ΓΧΑ συστήματα σε σειρά. Το



Σχήμα 2: Συστήματα Άσκησης 7.

πρώτο σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0.4\pi \\ 0, & 0.4\pi \leq |\omega| < \pi \end{cases} \quad (13)$$

ενώ το δεύτερο σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση

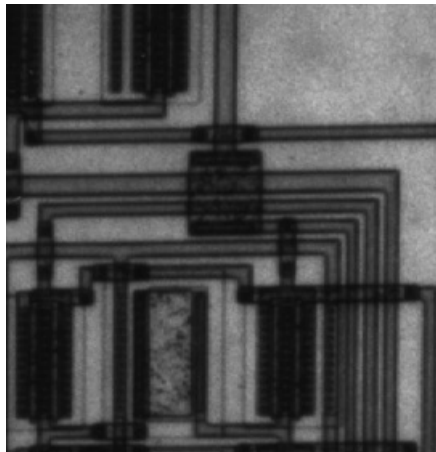
$$y[n] = w[n] - w[n - 1] \quad (14)$$

Αν η είσοδος στο σύστημα είναι η

$$x[n] = \cos(0.6\pi n) + \delta[n - 2] + 4 \quad (15)$$

βρείτε την έξοδο του συστήματος.

**Άσκηση 8.** Η εικόνα circuit.tif που φαίνεται στο Σχήμα (3) είναι στην πράξη ένας πίνακας 280x272 με τιμές στο grayscale εύρος τιμών (0 – 255).



Σχήμα 3: Εικόνα κυκλώματος Άσκησης 8.

Έστω τα συστήματα

$$h_1[n] : y[n] - 0.95y[n - 1] = x[n] \quad (16)$$

$$h_2[n] : y[n] = x[n] - 0.95x[n - 1] \quad (17)$$

όπου  $x[n]$  θεωρούμε τις γραμμές ή τις στήλες της εικόνας. Αν η εικόνα διαβαστεί κατά γραμμές, τότε έχουμε 280 σήματα διακριτού χρόνου, ενώ αν διαβαστεί κατά στήλες, τότε έχουμε 272 τέτοια σήματα.

Στα Σχήματα (4, 5) βλέπουμε τα αποτελέσματα του φιλτραρίσματος της αρχικής εικόνας όταν αυτά έχουν εφαρμοστεί κατά γραμμές (Line) ή κατά στήλες (Column). Στους τίτλους του σχήματος λείπει μια πληροφορία: με ποιο φίλτρο έχουμε φιλτράρει την αρχική εικόνα και πήραμε το εκάστοτε αποτέλεσμα.

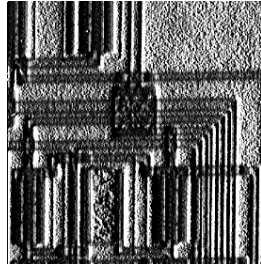


(α) Line ??? - pass

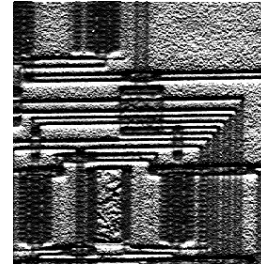


(β) Column ??? - pass

Σχήμα 4: Φιλτραρισμένα σήματα Άσκησης 8.



(α) Column ??? - pass



(β) Line ??? - pass

Σχήμα 5: Φιλτραρισμένα σήματα Άσκησης 8.

1. Βρείτε ποιο φίλτρο έχει χρησιμοποιηθεί σε κάθε εικόνα. Σκεφτείτε την κρουστική απόκριση κάθε φίλτρου και τι αναπαριστά αυτή. Σε κάθε περίπτωση, σχολιάστε τα συμπεράσματά σας.
2. Προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας παράγοντας τις εικόνες αυτές χρησιμοποιώντας την εντολή `filter` στο MATLAB. Χρησιμοποιήστε τον παρακάτω σκελετό κώδικα MATLAB για το φίλτρο  $h_1[n]$ :

```
A = imread('circuit.tif', 'tif'); % Read the image
[M,N] = size(A); % Get the size MxN
Al = double(reshape(A, 1, M*N)); % Convert MxN into a single line
a = 0.95; % Filter coefficient
Num = 1/G; % Filter numerator (input coefficient/G)
Den = [1 -a]; % Filter denominator (output coefficients)
Al_1 = filter(Num, Den, Al); % Filtering
Al_1 = uint8(reshape(Al_1, M, N)); % Make it back MxN
imshow(Al_1); % Show result
```

όπου στον παραπάνω κώδικα χρειάζεται να βρείτε το  $G$ , που ορίζεται ως

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \quad (18)$$

και το  $a = 0.95$  είναι συντελεστής της εξίσωσης διαφορών. Γράψτε παρόμοιο κώδικα για το  $h_2[n]$ . Στην προσπάθειά σας αυτή, θα σας φανεί χρήσιμος ο τελεστής ' (π.χ.  $B=A'$ ), ο οποίος υλοποιεί τον ανάστροφο ενός πίνακα (κάνει τις γραμμές, στήλες και τις στήλες, γραμμές του πίνακα  $A$ , και το αποτέλεσμα αποθηκεύεται στον πίνακα  $B$ ). Παραδώστε για κάθε περίπτωση κώδικα τυπωμένο στο χαρτί, καθώς και δείγματα των αποτελεσμάτων σας (εικόνες).