ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/10/2015 Ημερομηνία Παράδοσης: 3/11/2015

Άσκηση 1.

1. Είναι
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{1}$$
Αν το σήμα είναι άρτιο, τότε
$$x[n] = x[-n] \tag{2}$$
Τότε είναι
$$x[-n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega \tag{3}$$
Το άρτιο μέρος του σήματος είναι
$$\begin{aligned} x_e[n] &= \frac{1}{2}(x[n]+x[-n]) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega\Big) && (4)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})(e^{j\omega n}+e^{-j\omega n})d\omega && (5)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})2\cos(\omega n)d\omega && (6)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega n)d\omega && (7)\end{aligned}$$
Όμως επειδή $x[n] \in \Re$ και άρτιο, ισχύει ότι $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$, δηλ. η $X(e^{j\omega})$ είναι άρτια συνάρτηση του ω. Άρα το ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα γινομένου άρτιων συναρτήσεων σε συμμετρικό διάστημα, οπότε λόγω της (2)
$$x_e[n] = x[n] = \frac{1}{2\pi}2\int_{0}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega n)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega n)d\omega \tag{8}$$

2. Είναι
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{9}$$
Αν το σήμα είναι περιττό, τότε
$$x[n] = -x[-n] \tag{10}$$
Τότε είναι
$$-x[-n] = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega \tag{11}$$

Το περιττό μέρος του σήματος είναι

$$
\begin{aligned}
x_o[n] &= \frac{1}{2}(x[n]-x[-n]) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega\Big) && (12)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})(e^{j\omega n}-e^{-j\omega n})d\omega && (13)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})2j\sin(\omega n)d\omega && (14)\\
&= \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\sin(\omega n)d\omega && (15)
\end{aligned}
$$

Όμως επειδή $x[n] \in \Re$ και περιττό, ισχύει ότι $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$, δηλ. η $X(e^{j\omega})$ είναι περιττή συνάρτηση του ω. Άρα το ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα γινομένου περιττών συναρτήσεων σε συμμετρικό διάστημα, το οποίο είναι άρτιο γινόμενο! Οπότε λόγω της (10)

$$
x_o[n] = x[n] = \frac{j}{2\pi}2\int_{0}^{\pi} X(e^{j\omega})\sin(\omega n)d\omega = \frac{j}{\pi}\int_{0}^{\pi} X(e^{j\omega})\sin(\omega n)d\omega \qquad (16)
$$

Άσκηση 2.

Για ευκολία, έστω

$$
x_m[n] = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}a^n u[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^m} \qquad (17)
$$

Για $m = 1$, είναι

$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= \frac{(n+1-1)!}{n!0!}a^n u[n] && (18)\\
&= \frac{n!}{n!}a^n u[n] && (19)\\
&= a^n u[n] && (20)
\end{aligned}
$$

με $M.F.$

$$
X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \text{από γνωστό ζεύγος.} \qquad (21)
$$

Έστω ότι ισχύει για $m = m'$, δηλ.

$$
x_{m'}[n] = \frac{(n+m'-1)}{n!(m'-1)!}a^n u[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_{m'}(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^{m'}} \qquad (22)
$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $m = m' + 1$
Είναι

$$
\begin{aligned}
x_{m'+1}[n] &= \frac{(n+m'+1-1)}{n!(m'+1-1)!}a^n u[n] = \frac{(n+m')!}{n!m'!}a^n u[n] && (23)\\
&= \frac{n+m'}{m'}\frac{(n+m'-1)!}{n!(m'-1)!}a^n u[n] && (24)\\
&= \frac{n+m'}{m'}x_{m'}[n] && (25)\\
&= \frac{n}{m'}x_{m'}[n] + x_{m'}[n] && (26)
\end{aligned}
$$

Είναι

$$
\begin{aligned}
X_{m'+1}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{m'}j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^{m'}}\right)+\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^{m'}} && (27)\\
&= \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^{m'+1}}+\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^{m'}} && (28)\\
&= \frac{ae^{-j\omega}+(1-ae^{-j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})^{m'+1}} && (29)\\
&= \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^{m'+1}} && (30)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3.

Το $x[n]$ γράφεται ως

$$x[n] = \cos\left(\frac{15\pi n}{4}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{15\pi n}{4}}e^{-j\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{15\pi n}{4}}e^{j\frac{\pi}{3}} \tag{31}$$

Ξέρουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ είναι ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος, και η έξοδος για μια τέτοια ιδιοσυνάρτηση είναι $y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$.
Άρα η έξοδος για είσοδο $x[n] = \cos\left(\frac{15\pi n}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$ θα είναι

$$y[n] = \frac{1}{2}H(e^{j\frac{15\pi}{4}})e^{j\frac{15\pi n}{4}}e^{-j\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}H(e^{-j\frac{15\pi}{4}})e^{-j\frac{15\pi n}{4}}e^{j\frac{\pi}{3}} \tag{32}$$

Είναι

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\frac{15\pi}{4}}) &= e^{-j(\frac{1}{2}\frac{15\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} && (33)\\
&= e^{-j\frac{17\pi}{8}} && (34)\\
&= e^{-j(\frac{16\pi}{8}+\frac{\pi}{8})} && (35)\\
&= e^{-j\frac{\pi}{8}} && (36)
\end{aligned}
$$

και

$$H(e^{-j\frac{15\pi}{4}}) = e^{-j\left(\frac{1}{2}(-\frac{15\pi}{4})+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-j\frac{3\pi}{8}} \tag{37}$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{15\pi n}{4}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{8}}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{15\pi n}{4}} && (38)\\
&= \frac{1}{2}e^{-j\frac{11\pi}{24}}e^{j\frac{15\pi n}{4}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{24}}e^{-j\frac{15\pi n}{4}} && (39)\\
&= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}(e^{j\frac{5\pi}{24}}e^{j\frac{15\pi n}{4}})+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}(e^{-j\frac{5\pi}{24}}e^{-j\frac{15\pi n}{4}}) && (40)\\
&= e^{-j\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{15\pi n}{4}+\frac{5\pi}{24}\right) && (41)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 4.

1. (α΄) σύστημα αιτιατό, άρα $h[n] = 0$, $n < 0$.

   (β΄) $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$, άρα $h[n]$ πραγματικό.

   (γ΄) $h[n+1] \in \Re$, άρα έχει μηδενική φάση, οπότε είναι συμμετρικό ως προς το $n_0 = 0$. Οπότε το $h[n]$ θα είναι συμμετρικό ως προς το $n_0 = 1$.

   Άρα αφού είναι $h[n] = 0$, $n < 0$ και συμμετρικό ως προς το $n_0 = 1$, θα είναι αναγκαστικά πεπερασμένο, και μάλιστα διάρκειας N=3 δείγματα.

2. Είναι

   (α΄)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega 0}d\omega = h[0] = 2 = h[2] \tag{42}$$

   και

   (β΄)
$$H(e^{j\pi}) = 0 \iff \sum_{n=0}^{2} h[n]e^{-j\pi n} = 0 \iff \tag{43}$$
$$h[0] + h[1]e^{-j\pi} + h[2]e^{-j2\pi} = 0 \overset{(42)}{\iff} 2 + h[1](-1) + 2 = 0 \iff \tag{44}$$
$$2 - h[1] + 2 = 0 \iff h[1] = 4 \tag{45}$$

   Άρα το σήμα είναι
$$h[n] = \begin{cases} 2, & n = 0, 2 \\ 4, & n = 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{46}$$

Άσκηση 5.

Αφού $|H(e^{j\omega})| = 1$, τότε το πλάτος της εξόδου δεν θα αλλάξει, παρά μόνον η φάση, που είναι
$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\omega + \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \\ -\frac{1}{3}\omega - \frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \end{cases} \tag{47}$$

Είναι
$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi n}{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi n}{2}}e^{\frac{-j\pi}{4}} \tag{48}$$

και λόγω ιδιότητας ιδιοσυνάρτησης, θα είναι
$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}H(e^{j\frac{3\pi}{2}})e^{j\frac{3\pi n}{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}H(e^{-j\frac{3\pi}{2}})e^{-j\frac{3\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} && (49) \\ &= \frac{1}{2}H(e^{-j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{3\pi n}{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{-j\frac{3\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} && (50) \\ &= \frac{1}{2}1e^{j\frac{2\pi}{3}}e^{j\frac{3\pi n}{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}1e^{-j\frac{2\pi}{3}}e^{-j\frac{3\pi n}{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} && (51) \\ &= \frac{1}{2}e^{j\frac{11\pi}{12}}e^{j\frac{3\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{11\pi}{12}}e^{-j\frac{3\pi n}{2}} && (52) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi n}{2} + \frac{11\pi}{12}\right) && (53) \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Ζητείται να δείξετε ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} sinc^2(an) = \frac{1}{a}, \quad 0 < a < 1 \tag{54}$$

Από τη σχέση του Parseval:

$$\sum_n \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \tag{55}$$

Άρα εδώ

$$x[n] = sinc(an) = \frac{\sin(\pi an)}{\pi an} \tag{56}$$

Ξέρουμε από θεωρία ότι

$$\frac{\sin(an)}{\pi n} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\omega| < a \\ 0, & a < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{57}$$

Άρα

$$x[n] = \frac{\sin(\pi an)}{\pi an} = \frac{1}{a}\frac{\sin(\pi an)}{\pi n} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & |\omega| < \pi a \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{58}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sum_n sinc^2(an) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi a}^{\pi a}\left(\frac{1}{a}\right)^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a}\right)^2 \omega\Big]_{-\pi a}^{\pi a} && (59) \\ &= \frac{1}{2\pi a^2}(\pi a + \pi a) && (60) \\ &= \frac{1}{2\pi a^2} 2\pi a && (61) \\ &= \frac{1}{a} && (62) \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

Άν το $x[n]$ περάσει από το ΓΧΑ $\#1$, το οποίο είναι χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.4\pi$, προφανώς, θα κόψει εντελώς το ημίτονο συχνοτήτων $\omega_0 = 0.6\pi$ (αφού $0.6\pi > 0.4\pi$) και θα περάσουν τα άλλα δύο σήματα. Η σταθερά

$$x_1[n] = 4 \tag{63}$$

έχει M.F.

$$X_1(e^{j\omega}) = 8\pi\delta(\omega) \tag{64}$$

οπότε περνάει αναλλοίωτη. Το σήμα

$$x_2[n] = \delta[n-2] \tag{65}$$

έχει M.F.

$$X_2(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \tag{66}$$

άρα θα μεταβληθεί ως

$$W_2(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}, \ |\omega| < 0.4\pi \tag{67}$$

Στο πεδίο του χρόνου αυτό θα είναι

$$
\begin{aligned}
w_2[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-0.4\pi}^{0.4\pi} e^{-j2\omega}e^{j\omega n}d\omega && (68)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-0.4\pi}^{0.4\pi} e^{j\omega(n-2)}d\omega && (69)\\
&= \frac{1}{j2\pi(n-2)}e^{j\omega(n-2)}\Big]_{-0.4\pi}^{0.4\pi} && (70)\\
&= \frac{1}{j2\pi(n-2)}\Big(e^{j0.4\pi(n-2)} - e^{-j0.4\pi(n-2)}\Big) && (71)\\
&= \frac{1}{j2\pi(n-2)}2j\sin\Big(0.4\pi(n-2)\Big) && (72)\\
&= \frac{1}{\pi(n-2)}\sin\Big(0.4\pi(n-2)\Big) && (73)\\
&= \frac{\sin\Big(0.4\pi(n-2)\Big)}{\pi(n-2)} && (74)
\end{aligned}
$$

Άρα τελικά στην έξοδο του ΓΧΑ $\#1$ θα υπάρχει το σήμα

$$
w[n] = \frac{\sin\Big(0.4\pi(n-2)\Big)}{\pi(n-2)} + 4 = w_1[n] + w_2[n] \quad (75)
$$

Το δεύτερο ΓΧΑ σύστημα είναι ένας διαφοριστής, δηλ. παραγωγίζει το σήμα εισόδου του. Οπότε το σήμα $w_2[n] = 4$ θα απαλειφθεί.

Το ΓΧΑ $\#2$ απλά περνάει στην έξοδο την είσοδό του, $w[n]$, και την καθυστέρησή του κατά 1 δείγμα, $w[n-1]$, άρα τελικά,

$$
y[n] = \frac{\sin\Big(0.4\pi(n-2)\Big)}{\pi(n-2)} - \frac{\sin\Big(0.4\pi(n-3)\Big)}{\pi(n-3)} \quad (76)
$$