ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

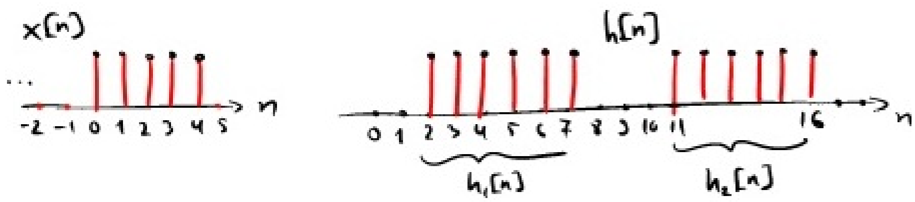
Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/10/2015 Ημερομηνία Παράδοσης: 23/10/2015

Άσκηση 1.

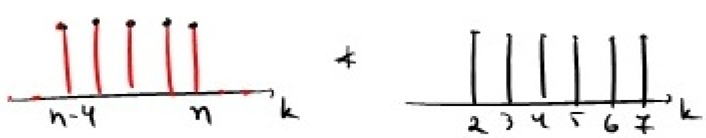
1. (α΄) $x[n] = \delta[n-1],\ h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1]$
$y[n] = \delta[n-1] * (2\delta[n] + \delta[n-1]) = 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

(β΄) $x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1],\ h[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$
$y[n] = 2(-\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) + \delta[n-1] - 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$
$= -2\delta[n]\ +\ 5\delta[n-1] - \delta[n-3]$

(γ΄) $y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$



Έστω $c_1[n] = x[n] * h_1[n]$ και $c_2[n] = x[n] * h_2[n]$.



$$c_1[n] = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 2, n = 3, n = 11 \\ 3, n = 4, n = 10 \\ 4, n = 5, n = 9 \\ 5, n = 6, n = 8 \\ 6, n = 7 \end{cases}$$

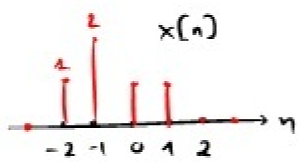
Είναι $h_2[n] = h_1[n-9]$, άρα $c_2[n] = h_2[n] * x[n] = h_1[n] * x[n] = c_1[n-9]$
Είναι:

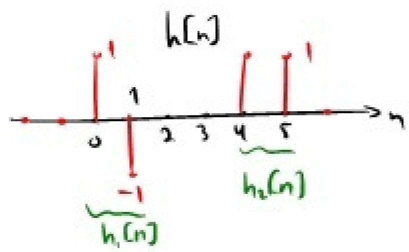
$$c_1[n-9] = \begin{cases} 1, n = 11 \\ 2, n = 12, n = 20 \\ 3, n = 13, n = 19 \\ 4, n = 14, n = 18 \\ 5, n = 15, n = 17 \\ 6, n = 16 \end{cases}$$

Άρα τελικά, $y[n] = c_1[n] + c_1[n-9]$, όπως παραπάνω.

(δ΄) $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$

$$x[n] * h_1[n] = x[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = x[n] - x[n-1] = \begin{cases} 1, n = -2 \\ 1, n = -1 \\ -1, n = 0 \\ -1, n = 2 \end{cases}$$



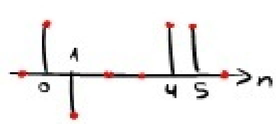


$$\text{Είναι } x[n] * h_2[n] = x[n] * (\delta[n-4] + \delta[n-5]) = x[n-4] + x[n-5] = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ 3, & n = 3 \\ 3, & n = 4 \\ 2, & n = 5 \\ 1, & n = 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα τελικά,

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = -2, n = -1, n = 2, n = 6 \\ -1, & n = 0 \\ 3, & n = 3, n = 4 \\ 2, & n = 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

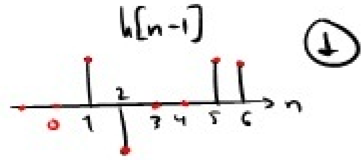
2. Είναι $h[n]$

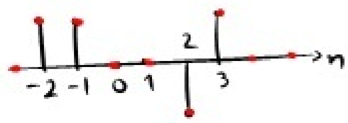


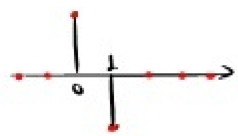
(α΄) Είναι $h[n-1]$

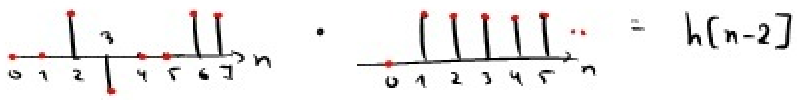
(β΄) $h[3-n] = h[-n+3] = h[-(n-3)]$

(γ΄) Είναι $h[n]u[1-n]$, $u[1-n] = \begin{cases} 1, n \leq 1 \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$





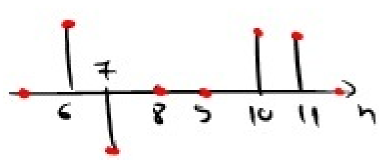




(δ΄) Είναι $h[n-2]u[n-1]$, $u[n-1] = \begin{cases} 1, n \geq 1 \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$

(ε΄) Είναι Η $h[n-1]$ φαίνεται στο Σχήμα με την επισήμανση (1). Το γινόμενο με $\delta]n-2]$ παίρνει το δείγμα της $h[n-1]$ στη θέση $n=2$, άρα $h[n-1]\delta[n-2]$:

(ϛ΄) Είναι Η συνέλιξη με $\delta[n-5]$ μετατοπίζει το $h[n-1]$ κατά 5 δείγματα δεξιά. Άρα η (1) γίνεται:



Άσκηση 2.

1.
$$y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$$

- Είναι
$$y_1[n] = \sum_{k=n_0}^{n} ax_1[k] \ , \ y_2[n] = \sum_{k=n_0}^{n} bx_2[k]$$
$$y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) = \sum_{k=n_0}^{n} ax_1[k] + \sum_{k=n_0}^{n} bx_2[k] = y_1[n] + y_2[n]$$

Άρα είναι γραμμικό.
- Είναι αιτιατό μόνο αν $n_0 \geq 0$ και $n \geq 0$.
- Δεν είναι ευσταθές γιατί αν $|x[n]| < B_x$, τότε
$$|y[n]| = |\sum_{k=n_0}^{n} x[k]| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |x[k]| < \sum_{k=n_0}^{n} B_x = B_x(n - n_0 + 1) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$
- Είναι με μνήμη (προφανές), ενώ είναι Χ.Α. γιατί
$$y[n-l] = \sum_{k=n_0}^{n-l} x[k] \text{ και } y_0[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k-l] = \sum_{m=n_0}^{n-l} x[m] = y[n-l]$$

2.
$$y[n] = e^{x[n+1]}$$

- Είναι $y_1[n] = e^{ax_1[n+1]}$, $y_2[n] = e^{bx_2[n+1]}$. Επομένως,
$$y[n] = e^{ax_1[n]+bx_2[n]} = e^{ax_1[n]}e^{bx_2[n]} \neq y_1[n] + y_2[n]$$

Άρα είναι μη γραμμικό.
- Είναι ευσταθές γιατί αν $|x[n]| \leq B_x$, τότε $|y[n]| = |e^{x[n+1]}| \leq e^{|x[n+1]|} < e^{B_x} < +\infty$.
- Δεν είναι αιτιατό γιατί απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί μία δεδομένη έξοδος.
- Είναι με μνήμη (προφανές).
- Είναι $y[n-n_0] = e^{x[n-n_0+1]}$ και $y_0[n] = e^{x[(n-n_0)+1]} = e^{x[n-n_0+1]} = y[n-n_0]$, άρα είναι Χ.Α.

3.
$$y[n] = x[n] + 3u[n+1]$$

- Είναι $y_1[n] = ax_1[n] + 3u[n+1]$, $y_2[n] = bx_2[n] + 3u[n+1]$ και $y[n] = (ax_1[n] + bx_2[n]) + 3u[n+1] \neq y_1[n] + y_2[n]$, άρα είναι μη γραμμικό.
- Είναι μη αιτιατό λόγω του $u[n+1]$.
- Είναι ευσταθές γιατί αν $|x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = |x[n] + 3u[n+1]| \leq |x[n]| + 3|u[n+1]| < B_x + 3u[n+1]$. Όμως, $u[n] = 1 \, \forall \, n \geq 0$, οπότε $|y[n]| < B_x + 3$, για $n \geq -1$ ενώ $|y[n]| < B_x$, για $n < -1$.
- Είναι χωρίς μνήμη (προφανές).
- Είναι μη Χ.Α. γιατί $y[n-n_0] = x[n-n_0] + 3y[n-n_0+1]$, ενώ $y_0[n] = x[n-n_0] + 3u[n+1] \neq y[n-n_0]$.

4.

$$y[n] = \frac{1}{x[n]}$$

- Είναι μη γραμμικό γιατί:

$$y[n] = \frac{1}{ax_1[n] + bx_2[n]} \neq \frac{1}{ax_1[n]} + \frac{1}{bx_2[n]}.$$

- Είναι αιτιατό (προφανές) και χωρίς μνήμη (προφανές).
- Είναι μη ευσταθές γιατί αν $0 \leq |x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = \left|\frac{1}{x[n]}\right| = \frac{1}{|x[n]|} \Rightarrow \frac{1}{B_x} < |y[n]| < \lim_{x[n]\to 0} \frac{1}{|x[n]|} = +\infty$$

.

- Είναι Χ.Α γιατί $y[n-n_0] = \frac{1}{x[n-n_0]}$ και $y_0[n] = \frac{1}{x[n-n_0]} = y[n-n_0]$.

5.

$$y[n] = \log|x[n]|$$

- Είναι μη γραμμικό γιατί $\log|ax_1[n] + bx_2[n]| \neq \log|ax_1[n]| + \log|bx_2[n]|$.
- Είναι χωρίς μνήμη και αιτιατό (προφανή).
- Είναι μη ευσταυθές, γιατί αν $0 \leq |x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = |\log|x[n]||$, αν $x[n] = 0$, για κάποιο n, τότε $y[n] \to +\infty$.
- Είναι Χ.Α. γιατί $y[n-n_0] = \log|x[n-n_0]|$ και $y_0[n] = \log|x[n-n_0]| = y[n-n_0]$.

6.

$$y[n] = \frac{\sin(x[n])}{n}$$

- Είναι μη γραμμικό γιατί

$$\frac{\sin(ax_1[n] + bx_2[n])}{n} \neq \frac{\sin(ax_1[n])}{n} + \frac{\sin(bx_2[n])}{n}$$

- Είναι χωρίς μνήμη και αιτιατό.
- Είναι μη Χ.Α. γιατί $y[n-n_0] = \frac{\sin(x[n-n_0])}{n-n_0}$ και $y_0[n] = \frac{\sin(x[n-n_0])}{n} \neq y[n-n_0]$.
- Είναι μη ευσταθές γιατί

$$|y[n]| = \frac{|\sin(x[n])|}{|n|} \leq \frac{1}{|n|} \Rightarrow -\frac{1}{|n|} \leq |y[n]| \leq \frac{1}{|n|}$$

και για $n = 0$, $y[0] \to +\infty$, αν $\sin(x[n]) \neq 0$.

Άσκηση 3.

1.
$$x[n] = e^{j(\pi n/6+\pi/3)}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\pi/6}k = 12k \xrightarrow{k=1} N_0 = 12$$

2.
$$x[n] = e^{j3\pi n/4}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{3\pi/4}k = \frac{8}{3}k \xrightarrow{k=3} N_0 = 8$$

3.
$$x[n] = e^{j\sqrt{2}\pi n/8}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi/8}k = \frac{16}{\sqrt{2}}k$$

Δεν υπάρχει $N_0 \in \mathbb{Z}$.

4.
$$x[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

Για το $\sin(\pi n/4), N_0 = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8k \xrightarrow{k=1} N_0 = 8$. Όμως η συνάρτηση $y[n] = \frac{1}{\pi n}$ δεν είναι περιοδική, άρα το γινόμενο δεν είναι περιοδικό.

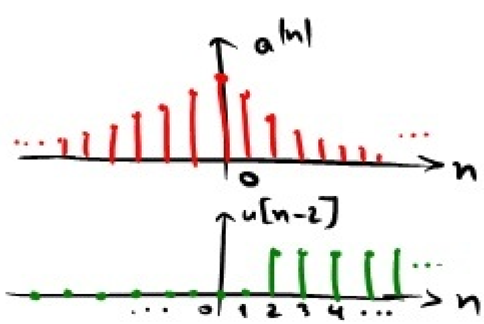
5.
$$x[n] = e^{-j\pi n/10} + e^{-jn/3}\ ,\ N_1 = \frac{2\pi}{\pi/10}k = 20k \xrightarrow{k=1} N_1 = 20 \text{ αλλά } N_2 = \frac{2\pi}{1/3}k = 6\pi k$$

Δεν υπάρχει $N_2 \in \mathbb{Z}$, άρα το άθροισμα δεν είναι περιοδικό.

6.
$$x[n] = e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi n/2} = 2\cos(\frac{\pi n}{2})\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\pi/2}k = 4k \xrightarrow{k=1} N_0 = 4$$

Άσκηση 4.

$$x[n] = a^{|n|}, |a| < 1 \quad h[n] = u[n-2]$$



<u>Αλγεβρική λύση:</u>
Είναι

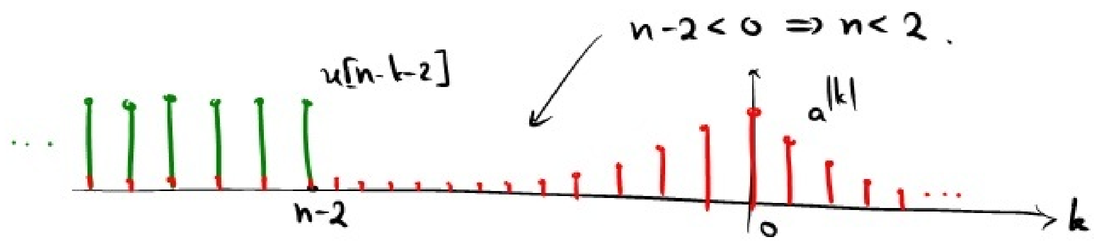
$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = \sum_k a^{|k|}u[n-k-2] = \sum_{k=-\infty}^{n-2} a^{|k|}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\bullet n-2<0: y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-2} a^{-k} = \sum_{k=2-n}^{+\infty} a^{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k} - \sum_{k=0}^{1-n} a^{k} = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{2-n}}{1-a} = \frac{a^{2-n}}{1-a}\ ,\ n<2$$

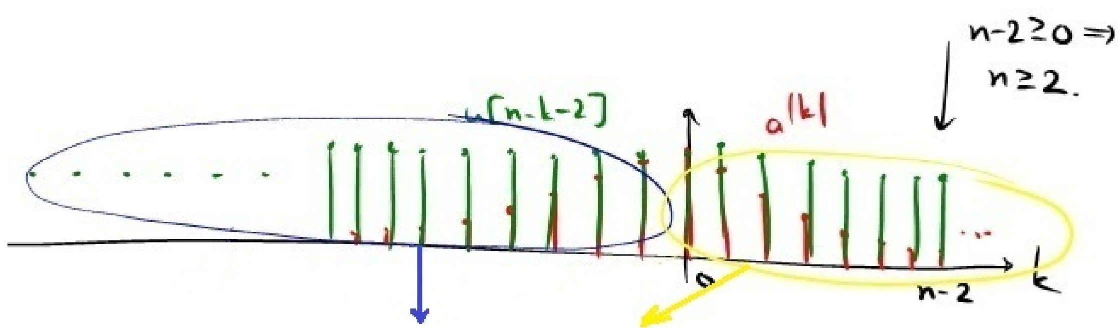
$$\bullet n-2\geq 0: y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} + \sum_{k=0}^{n-2} a^{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k} + \sum_{k=0}^{n-2} a^{k} = \frac{1}{1-a} - 1 + \frac{1-a^{n-1}}{1-a} = \frac{1+a-a^{n-1}}{1-a}, n\geq 2$$

Γραφική λύση:
Πρώτη περίπτωση:



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-2} a^{|k|} = \sum_{k=-\infty}^{n-2} a^{-k} = \text{ίδια λύση με πριν.}$$

Δεύτερη περίπτωση:



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} + \sum_{k=0}^{n-2} a^{k} = \text{ίδια λύση με πριν.}$$

Άσκηση 5.
Δίνεται το

$$y[n] + \frac{1}{a} y[n-1] = x[n-1]\ ,\ \text{ΓΧΑ και αιτιατό}$$

1.
$$\begin{aligned}
h[n] &= -\frac{1}{a}h[n-1] + \delta[n-1]\ ,\ h[n] = 0\ ,\ n<0 \\
h[0] &= -\frac{1}{a}h[-1] + \delta[-1] = 0 \\
h[1] &= -\frac{1}{a}h[0] + \delta[0] = 1 \\
h[2] &= -\frac{1}{a}h[1] + \delta[1] = -\frac{1}{a} \\
h[3] &= -\frac{1}{a}h[2] + \delta[2] = -\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}\right) = \left(-\frac{1}{a}\right)^2 \\
h[4] &= -\frac{1}{a}h[3] + \delta[3] = -\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}\right)^2 = \left(-\frac{1}{a}\right)^3 \\
h[n_0] &= -\frac{1}{a}h[n_0-1] + \delta[n_0-1] = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n_0-1}
\end{aligned}$$

Άρα,
$$h[n] = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1}\ ,\ n\geq 1 \implies h[n] = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Εναλλακτικά, έστω το σύστημα
$$y[n] + \frac{1}{a}y[n-1] = x[n]\ ,\ \text{ΓΧΑ και αιτιατό}$$

Η κρουστική απόκριση $h_1[n]$ προκύπτει ως:
$$z + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{a}\ ,\ \text{ άρα } h_1[n] = A\left(-\frac{1}{a}\right)^n u[n]$$

Το ΓΧΑ είναι αιτιατό: $h_1[n] = 0\ ,\ n<0$.
$$h_1[0] = -\frac{1}{a}h_1[-1] + \delta[0] = 0 + 1 = 1 \text{ και } h_1[0] = A\left(-\frac{1}{a}\right)^0 u[0] = A$$

Επομένως $A=1$, οπότε
$$h_1[n] = \left(-\frac{1}{a}\right)^n u[n]$$

Η απόκριση του παραπάνω συστήματος στην είσοδο $\delta[n-1]$ θα είναι $h[n] = h_1[n] = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} u[n-1]$, που είναι και η απόκριση του συστήματος
$$y[n] + \frac{1}{a}y[n-1] = x[n-1]$$

2. Για να είναι ευσταθές, πρέπει
$$\begin{aligned}
\sum_n |h[n]| < +\infty \Longleftrightarrow \sum_n \left|\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} u[n-1]\right| &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|-\frac{1}{a}\right|^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^k < +\infty\ ,\ \text{που ισχύει \underline{ανν}}\quad |a|>1
\end{aligned}$$

Άσκηση 6.

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \text{ μιγαδική}, \ a \in \mathbb{C}\ , \ x[n] \in \mathbb{R}$$

•

$$\begin{aligned} y_R[n] + jy_I[n] &= ay_R[n-1] + ajy_I[n-1] + x[n] \\ &= (a+bj)y_R[n-1] + (a+bj)jy_I[n-1] + x[n] \\ &= ay_R[n-1] + jby_R[n-1] + ajy_I[n-1] - by_I[n-1] + x[n] \\ &= ay_R[n-1] - by_I[n-1] + x[n] + j(by_R[n-1] + ay_I[n-1]) \end{aligned}$$

Άρα

$$y_R[n] = ay_R[n-1] - by_I[n-1] + x[n] \tag{1}$$

και

$$y_I[n] = j(by_R[n-1] + ay_I[n-1]) \tag{2}$$

• Από (1), είναι

$$y_R[n] = ay_R[n-1] - by_I[n-1] + x[n] \tag{3}$$

Λύνοντας την (2) ως προς $y_I[n-1]$, έχω:

$$y_I[n-1] = \frac{1}{a}y_I[n] - \frac{b}{a}y_R[n-1]$$

και άρα η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} y_R[n] &= ay_R[n-1] - \frac{b}{a}y_I[n] + \frac{b^2}{a}y_R[n-1] + x[n] \Longleftrightarrow && (4) \\ by_I[n-1] &= ay_R[n-1] + (a^2+b^2)y_R[n-2] + ax[n-1] \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (1) έχουμε:

$$y_R[n] = 2ay_R[n-1] - (a^2+b^2)y_R[n-2] + ax[n-1]$$

που είναι εξίσωση διαφορών 2ης τάξης που συνδέει το $y_R[n]$ με το $x[n]$.