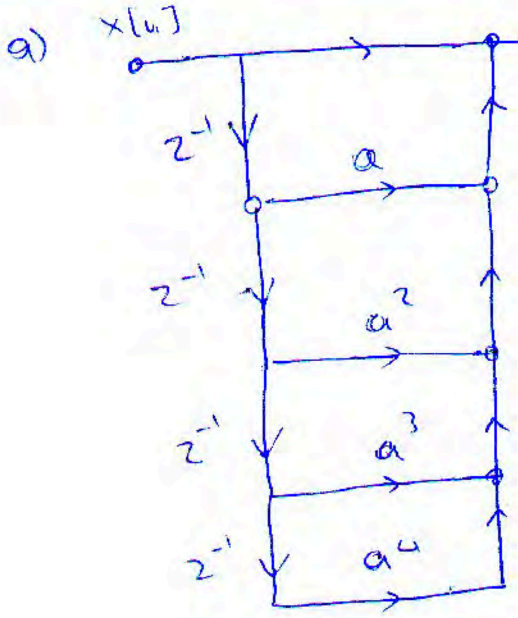
Ασκηση 1

$H(z) = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + a^4 z^{-4}$

α)



β) Το σύστημα είναι σχετικά απλό επομένως δε χρειάζεται να βάλουμε ενδιάμεσες μεταβλητές ώστε να δείξουμε ότι

$$y[n] = a x[n-1] + a^2 x[n-2] + a^3 x[n-3] + a^4 x[n-4] + x[n] \quad (1)$$

Επίσης, $H(z) = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + a^4 z^{-4}$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + a^4 z^{-4}$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) + a z^{-1} X(z) + a^2 z^{-2} X(z) + a^3 z^{-3} X(z) + a^4 z^{-4} X(z)$$

$$\Rightarrow y[n] = x[n] + a x[n-1] + a^2 x[n-2] + a^3 x[n-3] + a^4 x[n-4] \quad (2)$$

(1) = (2) άρα η πραγματοποίηση αυτή περιγράφει το σύστημα

γ) Γνωρίζουμε ότι $1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots + a^N z^{-N} = \sum_{n=0}^{N} (a z^{-1})^n =$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} (a z^{-1})^n \quad \text{όπου} \quad N_1 = 0 \text{ και } N_2 = N$$

όμως $\sum_{n=N_1}^{N_2} (a z^{-1})^n = \frac{(a z^{-1})^{N_1} - (a z^{-1})^{N_2+1}}{1 - a z^{-1}}, \quad a \neq 1$

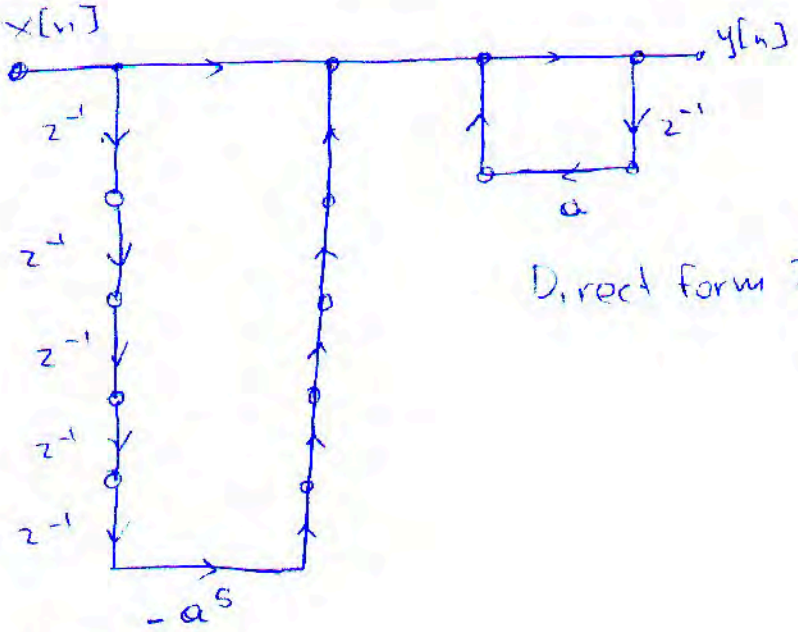
$$\sum_{n=N_1}^{N_2} (a z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{N} (a z^{-1})^n \ \overset{\text{εδώ}}{\underset{N=4}{=}} \ \sum_{n=0}^{4} (a z^{-1})^n =$$

$$= \frac{(a z^{-1})^0 - (a z^{-1})^{4+1}}{1 - a z^{-1}} = \frac{1 - (a z^{-1})^5}{1 - a z^{-1}}$$

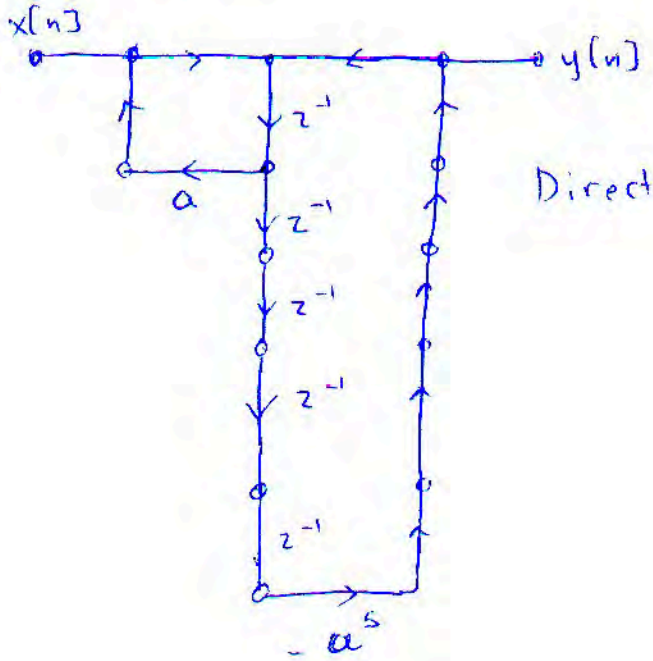
Η πραγματοποίηση του συστήματος αυτού θα έχει ανάδραση διότι έχει 1 πόλο

→

$$H(z) = \frac{1-(az^{-1})^5}{1-az^{-1}} = \frac{1-a^5z^{-5}}{1-az^{-1}}$$



Direct form I



Direct Form II

δ) Ερώτημα α: 4 πύλες, 4 πολ/στές, 4 προσθέσεις

Ερώτημα β: Direct form I: 6 πύλες, 2 πολ/στές, 2 προσθέσεις

Ερώτημα γ: Direct form II: 5 πύλες, 2 πολ/στές, 2 προσθέσεις

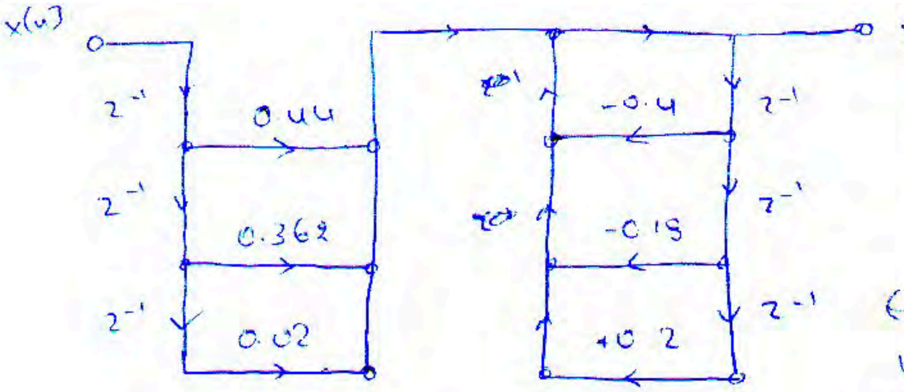
↳ 1 πύλη περισσεύει αλλά δεν χρειάζεται πολ/στές ή προσθέσεις

2]

$$H(z)= \frac{0.44z^2+0.362z+0.02}{z^3+0.4z^2+0.18z-0.2} \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{0.44z^{-1}+0.362z^{-2}+0.02z^{-3}}{1+0.4z^{-1}+0.18z^{-2}-0.2z^{-3}}$$

Direct Form I



Direct Form I

σύστημα τάξης 3

Επομένως αρκεί να επιλέξω κατάλληλα τα κλάσματα ώστε να προκύψει υποσύστημα κλάσης 1 και κλάσης 2 αντίστοιχα

Σε σειρά: $H(z) = H_1(z)\cdot H_2(z)$

Για να μπορέσω $H(z)$ να γραφεί ως γινόμενο 2 συστημάτων πρέπει να βρω τους πόλους.

$$1+0.4z^{-1}+0.18z^{-2}-0.2z^{-3}=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{2}{5} \\ z_2 = -\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\sqrt{34}\,i \\ z_3 = -\frac{2}{5}-\frac{1}{10}\sqrt{34}\,i \end{cases}$$

(με χρήση Matlab)

Άρα $1+0.4z^{-1}+0.18z^{-2}-0.2z^{-3} = \left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)\left(1-z_3z^{-1}\right)$

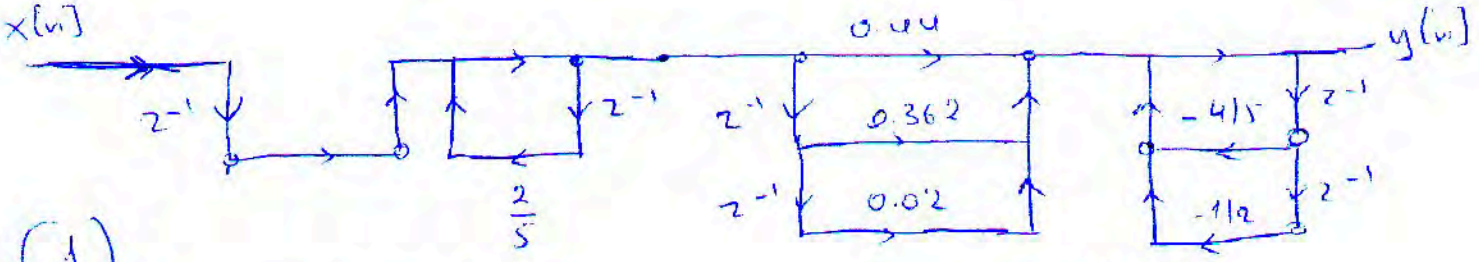
$$= \left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1-(z_2+z_3)z^{-1}+z_2z_3z^{-2}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)$$

Άρα $H(z) = \dfrac{0.44z^{-1}+0.362z^{-2}+0.02z^{-3}}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)} =$

$= \dfrac{z^{-1}\left(0.44+0.362z^{-1}+0.02z^{-2}\right)}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)} =$

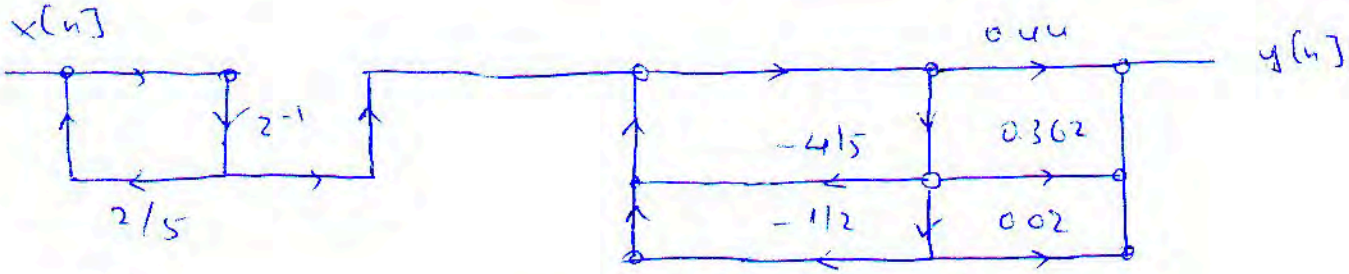
$= \dfrac{z^{-1}}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} \cdot \dfrac{0.44+0.362z^{-1}+0.02z^{-2}}{1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$



(1)

υποδομή τάξης 1 — υποδομή τάξης 2

Direct form I σε δομή



(2)

Direct form II σε δομή

παράλληλη σύνδεση : $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$

Όπως $H(z) = \dfrac{0.44z^{-1}+0.362z^{-2}+0.02z^{-3}}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)} = \dfrac{z^{-1}\left(0.44+0.362z^{-1}+0.02z^{-2}\right)}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$

$\dfrac{H(z)}{z^{-1}} = \dfrac{A}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} + \dfrac{Bz^{-1}+\Gamma}{1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$

→ αντί να βάλω σε $\dfrac{B}{1-z_4z^{-1}} + \dfrac{\Gamma}{1-z_3z^{-1}}$ το οποίο ως έχει αφού θα προκύψει υποδομή τάξης 2

$A = \left.\dfrac{0.44+0.362z^{-1}+0.02z^{-2}}{1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}\right|_{z^{-1}=\frac{5}{2}} = \dfrac{1.47}{6.125} = 0.24$

$$\frac{0.2u}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} + \frac{Bz^{-1}+\Gamma}{1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{a_{uu}+0.362z^{-1}+0.022z^{-2}}{\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.2u+0.192z^{-1}+0.12z^{-2}+\left(Bz^{-1}+\Gamma\right)\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right) = a_{uu}+0.362z^{-1}+0.022z^{-2}$$

$$\Rightarrow Bz^{-1}-\frac{2}{5}Bz^{-2}+\Gamma-\frac{2}{5}z^{-1}\Gamma = 0.2+0.17z^{-1}-0.1z^{-2}$$

$$\Gamma+\left(B-\frac{2}{5}\Gamma\right)z^{-1}-\frac{2}{5}Bz^{-2} = 0.2+0.17z^{-1}-0.1z^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma = 0.2\\ -\frac{2}{5}B = -0.1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\Gamma = 0.2\\ B = 0.25\end{array}\right\}$$

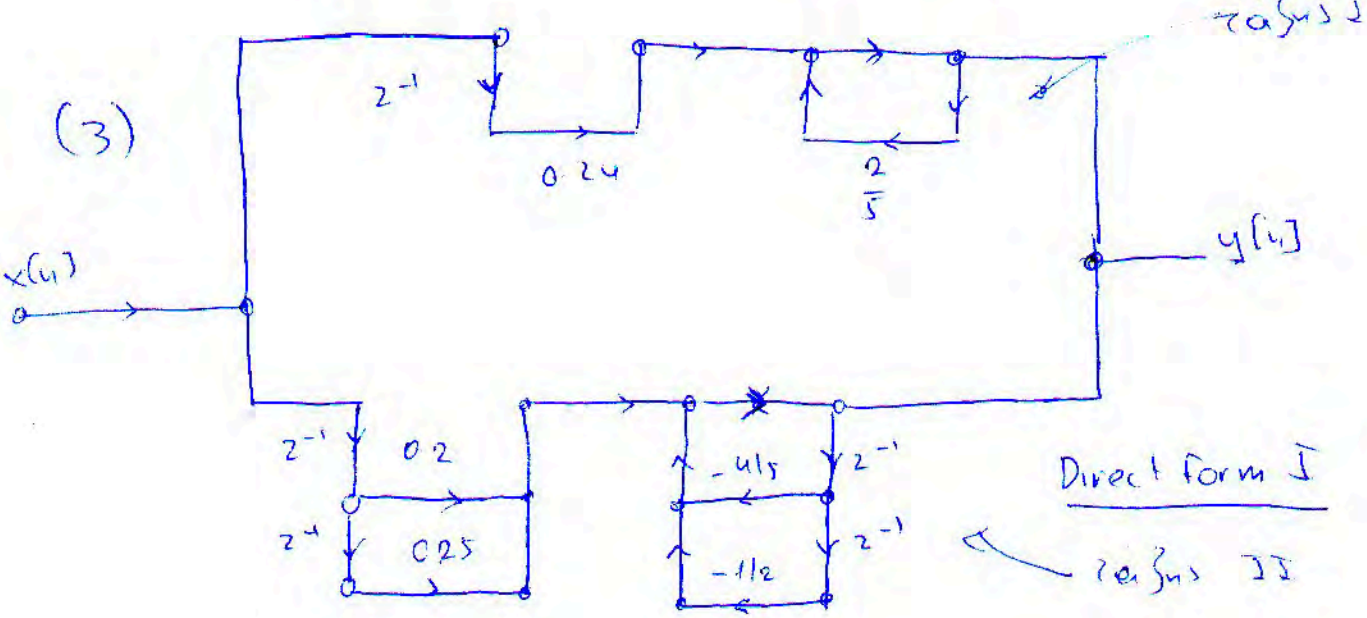
Αν είναι διαφορετικά πρέπει $B-\frac{2}{5}\Gamma = 0.17 \Rightarrow$

$0.25-\frac{2}{5}0.2 = 0.17$ ισχύει

Άρα

$$H(z) = \underbrace{\frac{0.2z^{-1}}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}}_{H_1(z)} + \underbrace{\frac{0.25z^{-2}+0.2z^{-1}}{1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}}_{H_2(z)}$$

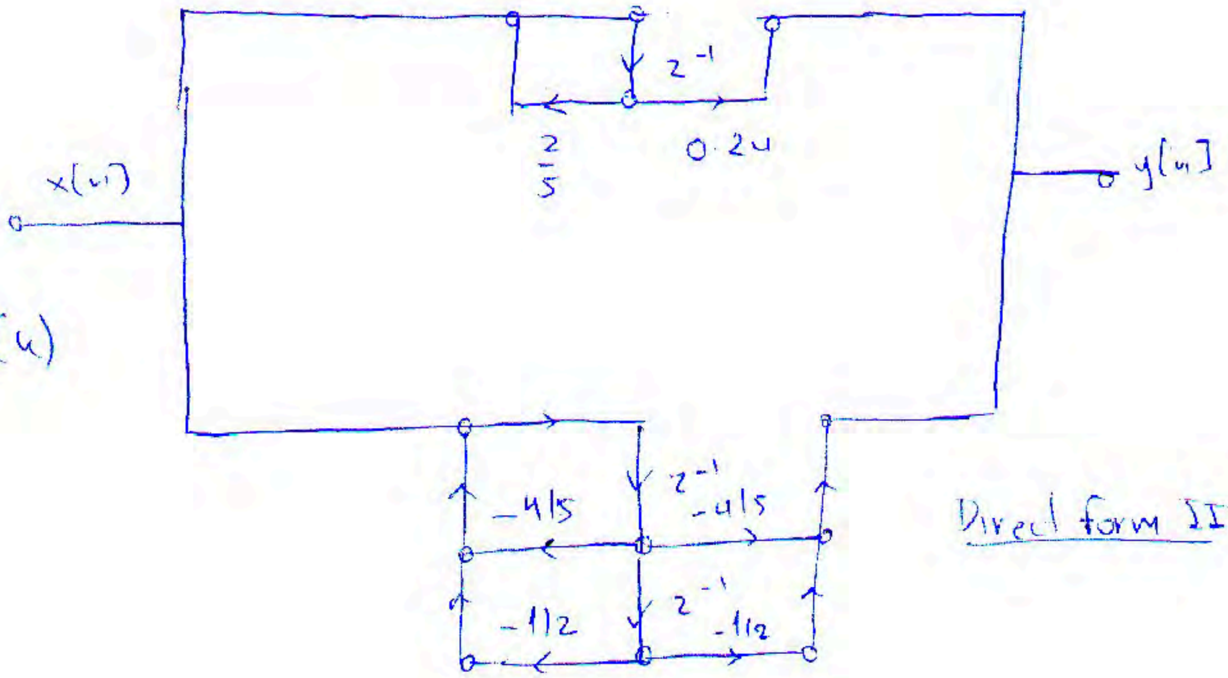
(3)



Direct form I

παράλληλη II

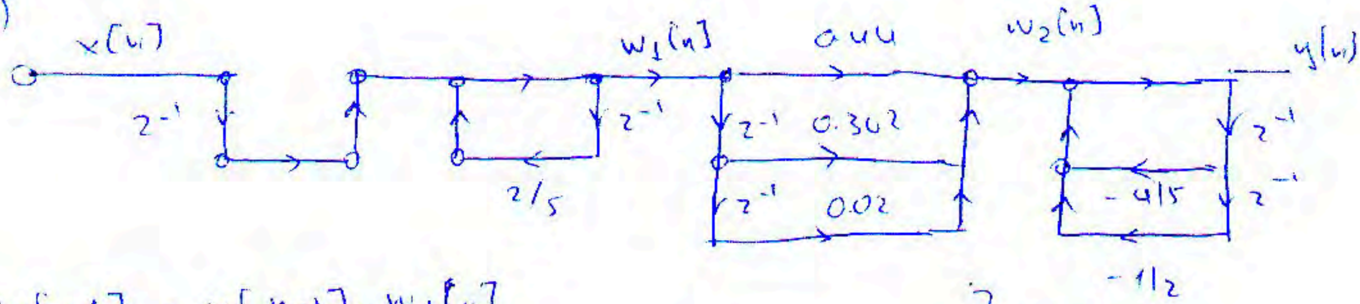
(4)



Direct form II

[illegible]

(1)



$\frac{2}{5} w_1[n-1] + x[n-1] = w_1[n]$

$0.44\, w_1[n] + w_1[n-1]\, 0.362 + w_1[n-2] \cdot 0.02 = w_2[n]$ } M.Z ⇒

$-\frac{4}{5} y[n-1] - \frac{1}{2} y(n-2] + w_2(n] = y(n]$

$W_1(z) = z^{-1} X(z) + \frac{2}{5} W_1(z) \cdot z^{-1} \Rightarrow \boxed{W_1(z) = \frac{z^{-1} X(z)}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}}}$ ①

$W_2(z) = 0.44 W_1(z) + W_1(z) \cdot 0.362 z^{-1} + W_1(z) \cdot z^{-2}\, 0.02 \Rightarrow$

$\boxed{W_2(z) = W_1(z)\left(0.44 + 0.362 z^{-1} + 0.02 z^{-2}\right)}$ (2)

$-\frac{4}{5} Y(z) z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2} Y(z) + W_2(z) = Y(z) \Rightarrow$

$\boxed{Y(z)\left(1 + \frac{4}{5} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}\right) = W_2(z)}$ ③

③ => ② => ① :

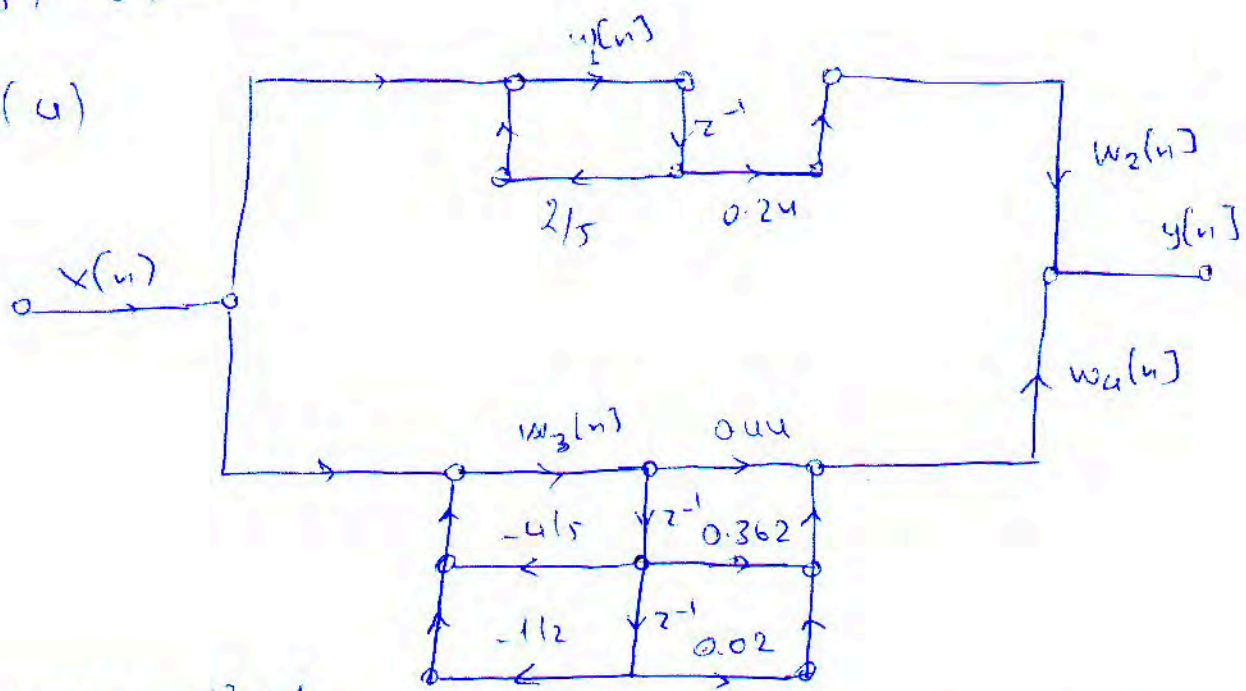
$$Y(z)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)=\frac{z^{-1}X(z)}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}\left(0.44+0.362z^{-1}+0.02z^{-2}\right)$$

$$H(z)=\frac{\left(0.44+0.36z^{-1}+0.02z^{-2}\right)z^{-1}}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

(2) δικό σας

(3) δικός σας

(4)



υποσύστημα 1

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{5}w_1[n-1]+x[n]&=w_1[n]\\ 0.24\,w_1[n-1]&=w_2[n]\end{aligned}\right\}\xrightarrow{MZ}\left.\begin{aligned}W_2(z)&=0.24\,W_1z^{-1}\\ \frac{2}{5}W_1(z)z^{-1}+X[z]&=W_1(z)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}W_2(z)&=0.24\,W_1z^{-1}\\ W_1(z)&=\frac{X(z)}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{W_2(z)=\frac{0.24}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}X(z)}\ (4)$$

υποσύστημα 2

$$\left.\begin{aligned}-\frac{4}{5}w_3[n-1]-\frac{1}{2}w_3[n-2]+x[n]&=w_3[n]\\ 0.44\,w_3[n]+0.362\,w_3[n-1]+0.02\,w_3[n-2]&=w_4[n]\end{aligned}\right\}\xrightarrow{MZ}\Rightarrow$$

$$-\frac{4}{5} W_3(z) z^{-1} - \frac{1}{2} W_3(z) z^{-2} + X(z) = W_3(z)$$
$$0.44 W_3(z) + 0.362 W_3(z) z^{-1} + 0.02 W_3(z) z^{-2} = W_4(z)$$
$\Rightarrow$

$$W_4(z) = W_3(z)\left(0.362 z^{-1} + 0.02 z^{-2} + 0.44\right)$$
$$W_3(z) = \frac{X(z)}{1 + \frac{4}{5} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}$$
$\Rightarrow$

(5)
$$\boxed{W_4(z) = \frac{X(z)}{1 + \frac{4}{5} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}} \left(0.44 + 0.362 z^{-1} + 0.02 z^{-2}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_2(z) + W_4(z)}{X(z)} = \underbrace{\frac{0.24}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}}}_{H_1(z)} + \underbrace{\frac{0.44 + 0.362 z^{-1} + 0.02 z^{-2}}{1 + \frac{4}{5} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}}_{H_2(z)}$$

3]

$$H(z) = \frac{\left(z^{-1} - \frac{1}{3}\right)\left(z^{-1} - 1/2\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} = \underbrace{\frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}}_{H_1(z)} \; \underbrace{\frac{z^{-1} - 1/2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}}_{H_2(z)}$$

$H(z) = H_1(z)\, H_2(z)$ σε σειρά

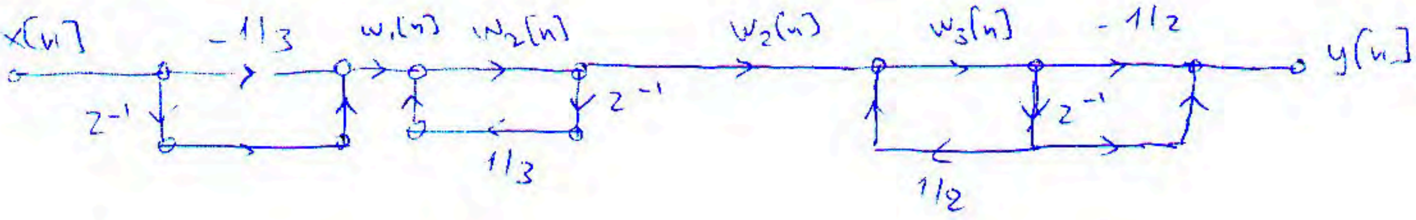
$H_1(z)$ αν πραγματοποιηθεί το Direct form I : 2 μνήμες

" " " " II : 1 μνήμη

ομοίως για $H_2(z)$.

Επιλέγω $H_1(z)$ direct form I και $H_2(z)$ Direct form II

ώστε συνολικά $\Rightarrow$ 3 μνήμες



Ανάλυση

$$-\frac{1}{3}x[n] + x[n-1] = w_1[n]$$
$$\frac{1}{3}w_2[n-1] + w_1[n] = w_2[n]$$

$\overset{MZ}{\Rightarrow}$ $W_1(z) = X(z)\left(-\frac{1}{3} + z^{-1}\right)$

$W_2(z) = W_1(z)\left(-\frac{1}{3}z^{-1} + 1\right)$ $\Rightarrow$

$$W_2(z) = \underbrace{\frac{-\frac{1}{3} + z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}}_{H_1(z)} X(z)$$

$$w_3[n] = w_2[n] + \frac{1}{2}w_3[n-1]$$
$$w_3[n-1] - \frac{1}{2}w_3[n] = y[n]$$

$\overset{MZ}{\Rightarrow}$ $W_3(z) = W_2(z)\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

$Y(z) = W_3(z)\left(z^{-1} - \frac{1}{2}\right)$

$$Y(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} W_2(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} X(z)$$

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$