ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΣΕΙΡΑΣ

Άσκηση 1

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

α' τρόπος (έξυπνο σπάσιμο)

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} + \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}\right)\cdot z^{-2}$$

$$= \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} + \left(\frac{\Gamma}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\Delta}{1-z^{-1}}\right)\cdot z^{-2}$$

$$A = \frac{1+2z^{-1}}{\cancel{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1-z^{-1}\right)}\cancel{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = -1$$

$$B = \frac{1+2z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}}\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=1} = 2$$

$$\Gamma = \frac{1}{\cancel{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1-z^{-1}\right)}\cancel{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}}\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=1} = \frac{2}{3}$$

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, έχουμε τα αντίστοιχα πεδία σύγκλισης: $|z| > \frac{1}{2} \cap |z| > 1 \cap |z| > \frac{1}{2} \cap |z| > 1$

Επομένως $\boxed{ROC: |z| > 1}$, άρα:

$$h[n] = -1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] + 2\cdot 1^{n} u[n] + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\, 1^{n-2} u[n-2]$$

$\underline{\text{θ}^{ος} \text{ τρόπος}}$ (διαίρεση πολυωνύμων)

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2+2z+1}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{5}{2}z+\frac{3}{2}\right)}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{5}{2}z+\frac{3}{2}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} = 1 + \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} = \dots$$

θ)

Ιδιοσυναρτήσεις:

$$y[n] = x[n]\, H(e^{j\omega_0}) = e^{j\frac{\pi n}{2}} H(e^{j\frac{\pi}{2}}) =$$

$$= e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}+e^{-2j\frac{\pi}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\left(1-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)} =$$

$$= e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{1-2j-1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}-e^{-j\pi/2}-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\cdot e^{-j\pi/2}}$$

$$= e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{2\cdot e^{-j\pi/2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} =$$

$$= 2e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{e^{-j\pi/2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}} = 2e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{j\pi/2}\right)}{\underbrace{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{j\pi/2}\right)}_{aa^*=|a|^2}}$$

$$= 2\cdot e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3e^{j\frac{\pi n}{2}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}-e^{j\pi n/2}\cdot e^{j\pi/2}}{\frac{10}{4}}$$

$$= \frac{6}{5}e^{j\frac{\pi}{2}(n-1)} - \frac{2}{5}e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}$$

Άσκηση 2

2] (α')

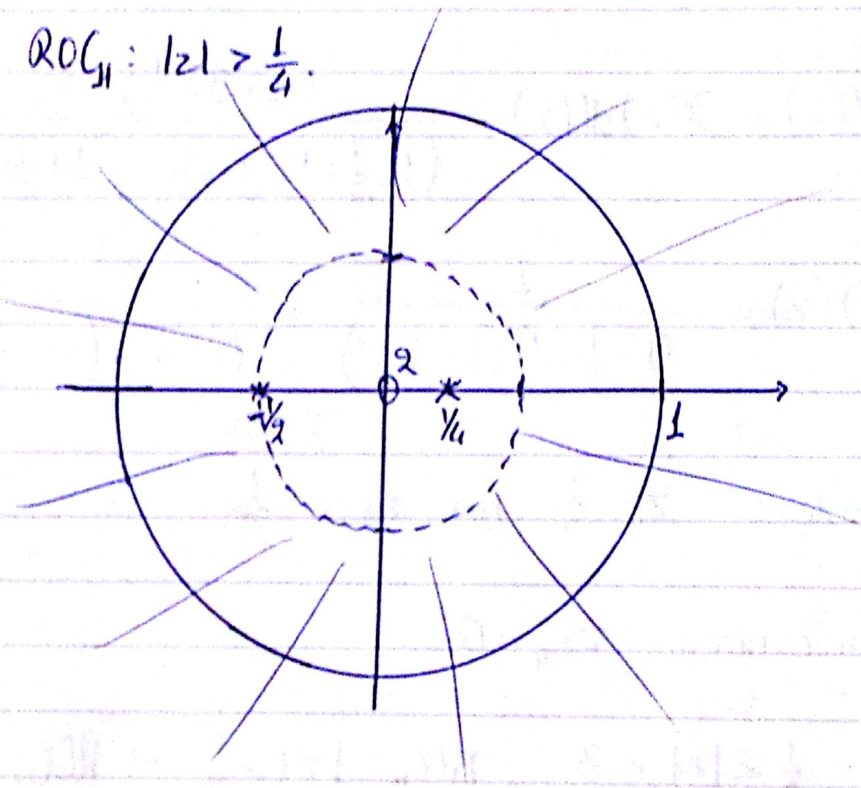
$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{z^2}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$$

Πόλοι: $z_1 = -\frac{1}{2}$ και $z_2 = \frac{1}{4}$

Μηδενικά: $z_{3,4} = 0$.

$ROC_y : ROC_x \cap ROC_H \Rightarrow ROC_y : |z| > \frac{1}{2}$, αφού $ROC_x : |z| > \frac{1}{2}$

και $ROC_H : |z| > \frac{1}{4}$.



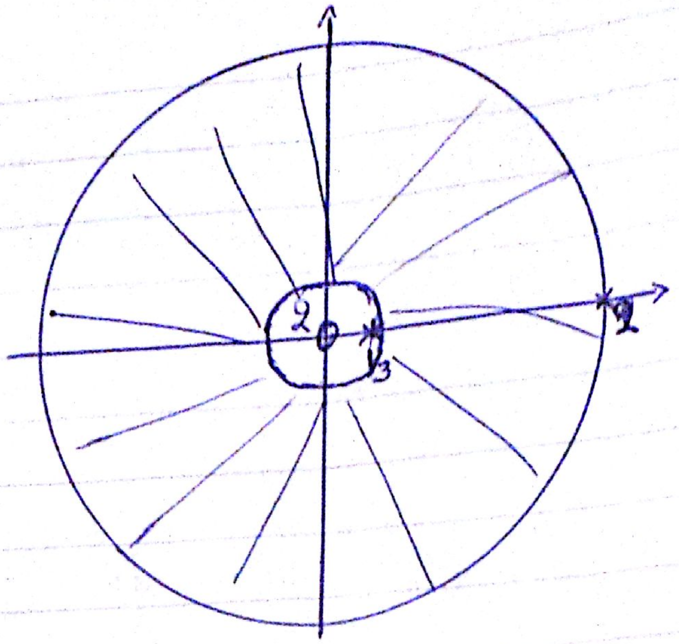
(β')

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-2)(z-\frac{1}{3})}$$

Πόλοι: $z_1 = 2$ και $z_2 = \frac{1}{3}$

Μηδενικά: $z_{3,4} = 0$.

$ROC_x : |z| < 2$, $ROC_H : |z| > \frac{1}{3}$ $\Rightarrow ROC_y : ROC_x \cap ROC_H : \frac{1}{3} < |z| < 2$



(γ')
$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{\cancel{(1+3z^{-1})}}{(1-\frac{1}{5}z^{-1})\cancel{(1+3z^{-1})}(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{5}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{3})}$$

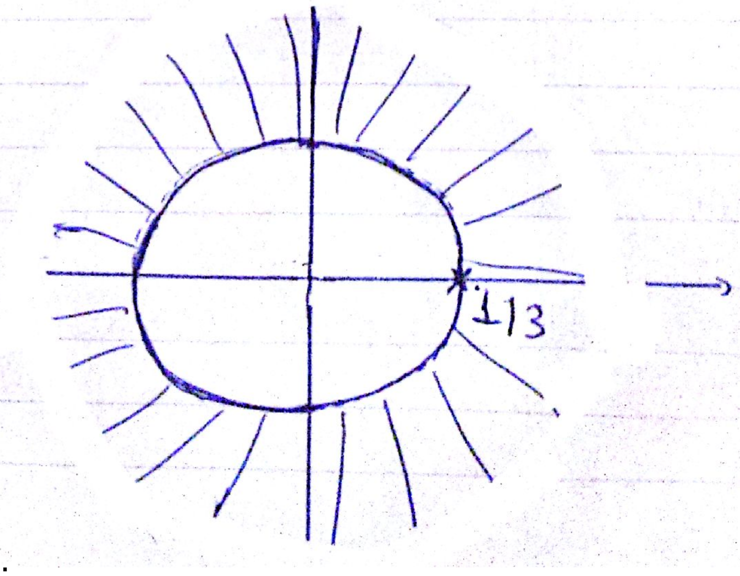
Πόλοι: $z_1 = \frac{1}{5}$ και $z_2 = -\frac{1}{3}$

Μηδενικά: $z_{3,4} = 0$

$ROC_x: \frac{1}{5} < |z| < 3$, $ROC_H: |z| > \frac{1}{3}$ $\Rightarrow ROC_Y: \frac{1}{3} < |z| < 3$

Εδώ επειδή απαλοίφεται ο πόλος στο 3 έχουμε τελικά

$ROC_Y: |z| > \frac{1}{3}$



Άσκηση 3

Από το διάγραμμα έχω:

$$X(z) = \frac{2}{(z-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4})(z-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4})(z+3/4)}, \quad |z|>3/4$$

$y[n] = x[-n+3] = x[-(n-3)]$

$\Rightarrow Y(z) = z^{-3}X(z^{-1})$

$$\frac{1}{z^{-1}-a} = \frac{-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$$

$$X(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{(z^{-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4})(z^{-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4})(z^{-1}+3/4)}$$

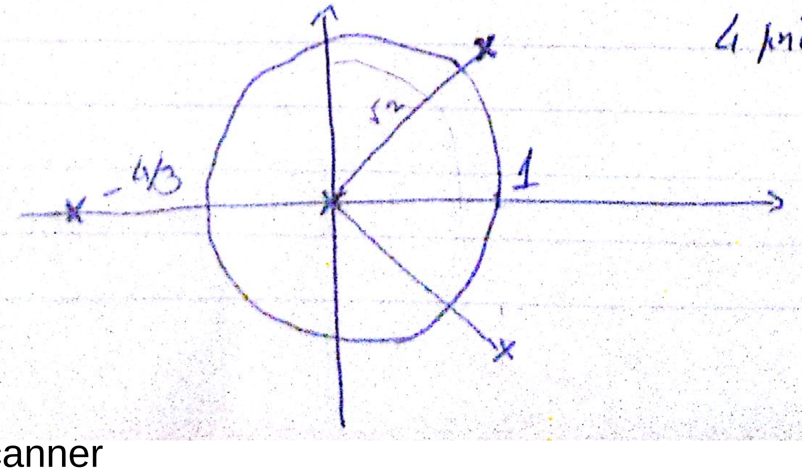
$$X(z^{-1}) = \frac{z^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}e^{+j\pi/4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}{(1-\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-\frac{2}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}z^{-1})(1+\frac{4}{3}z^{-1})}$$

$$X(z^{-1}) = \frac{8/3 \cdot z^{-1}}{(1-\sqrt{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-\sqrt{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1+\frac{4}{3}z^{-1})}$$

$$Y(z) = z^{-3}X(z^{-1})$$

$$= \frac{8/3\ z^{-4}}{(1-\sqrt{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-\sqrt{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1+\frac{4}{3}z^{-1})}$$

$$= \frac{8/3}{z(z-\sqrt{2}e^{-j\pi/4})(z-\sqrt{2}e^{j\pi/4})(z+4/3)}$$



4 μηδενικά στο ∞

Άσκηση 4

(α) ν.δ.ο $x^*[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X^*(z^*)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n}$$

$$X^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n](z^{-n})^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\cdot z^{*-n}$$ θέλω $z^* \to z$ $\Rightarrow$

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\cdot z^{-n}$$

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\cdot z^{-n}$$

(β) ν.δ.ο $x[-n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(1/z)$

$$Y_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]\cdot z^{-n} = \sum_{-k=-\infty}^{-k=\infty} x[k]\cdot z^{-(-k)} =$$

$$= \sum_{k=\infty}^{-\infty} x[+k]\cdot z^{k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](z^{-1})^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[+k]\left(\frac{1}{z}\right)^{-k} = X\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow$$

$$X\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]\cdot z^{-k}$$

(γ) ν.δ.ο $x_R[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(z) + X^*(z^*)\right]$

$y[n] = x_R[n]$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R[n]\, z^{-n} \overset{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x[n]+x^*[n]}{2}\cdot z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\cdot z^{-n} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}X^*(z^*)$$

(1) $x[n] = x_R[n] + j\,x_I[n]$

$$\underline{x^*[n] = x_R[n] - j\,x_I[n] \quad (+)}$$

$$x_R[n] = \frac{x[n] + x^*[n]}{2}$$

(2) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \Rightarrow$

$$X^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] \cdot (z^{-n})^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] \cdot z^{*-n}$$

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] \cdot z^{-n}$$

(δ) νδο $x_I[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{2j}\left[X(z) + X^*(z^*)\right]$ (Όμοια με (γ))

$y[n] = x_I[n]$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n] \cdot z^{-n} \overset{(3)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x[n] - x^*[n]}{2j} z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} - \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] \cdot z^{-n} \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{2j} X(z) - \frac{1}{2j} X^*(z^*)$$

(3) $x[n] = x_R[n] + j\,x_I[n]$

$$\underline{-x^*[n] = -x_R[n] + j\,x_I[n] \quad (+)}$$

$$x_I(n) = \frac{x[n] - x^*[n]}{2j}$$

Άσκηση 5

5 (α') Αφού είναι ευσταθές, σημαίνει ότι περιέχει το μοναδιαίο κύκλο το πεδίο σύγκλισης του $Y(z)$. Άρα:

$$ROC_Y: \frac{1}{2} < |z| < 2.$$

(β') Είναι φανερό ότι το $y[n]$ είναι αμφίπλευρο, αφού ROC_y είναι της μορφής $a < |z| < b$

(γ') Παρόμοια με το (α'), πρέπει το ROC_X να περιέχει το μοναδιαίο κύκλο. Επομένως:

$$ROC_X: |z| > \frac{3}{4}$$ και είναι δεξιόπλευρο.

(δ') Ναι, είναι αιτιατό.

(ε') $\lim_{z \to \infty} X(z) = x[0]$, $X(z) = \dfrac{(z-\frac{1}{4})}{(z+\frac{3}{4})(z-\frac{1}{2})}$

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} \frac{(z-\frac{1}{4})}{(z+\frac{3}{4})(z-\frac{1}{2})} = \lim_{z\to\infty} \frac{(z-\frac{1}{4})}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{3}{8}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{(z-\frac{1}{4})'}{(z^2+\frac{1}{4}z-\frac{3}{8})'}$$

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2z+\frac{1}{4}} = 0.$$

(ϛ')

$$Y(z) = \frac{z(z-\frac{1}{4})}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$$

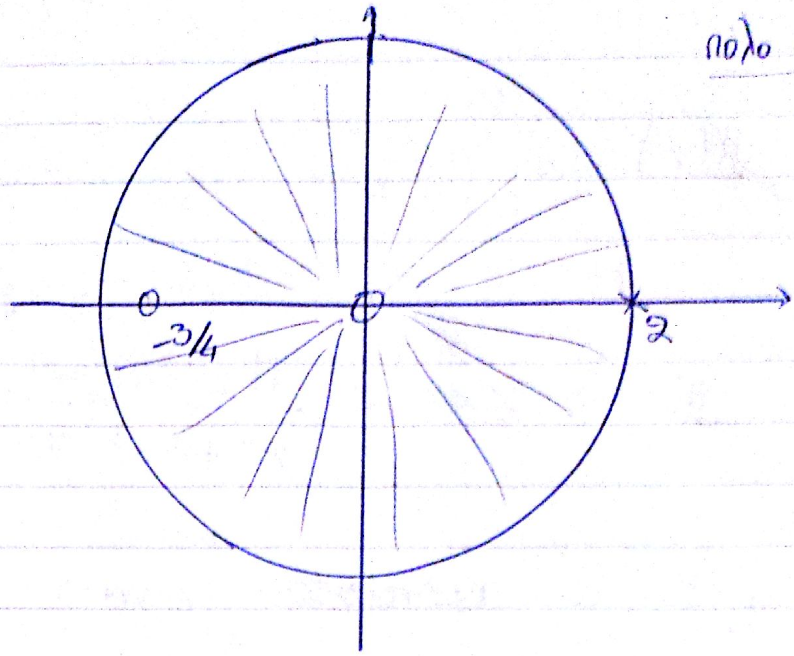
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z\cancel{(z-\frac{1}{4})}(z+\frac{3}{4})\cancel{(z-\frac{1}{2})}}{\cancel{(z-\frac{1}{2})}(z-2)\cancel{(z-\frac{1}{4})}} = \frac{z(z+\frac{3}{4})}{(z-2)}$$

Πόλοι: $z_1 = 2$, $z_2 = \infty \rightarrow \left(\lim_{z\to\infty} H(z) = \infty\right)$

Μηδενικά: $z_3 = 0$, $z_4 = -\frac{3}{4}$

Scanned by CamScanner

πολο στο ∞



Πιθανά ROC_H:

i) $2 < |z| < \infty$

ή

ii) $|z| < 2$

Στην περίπτωση i:
$ROC_H \cap ROC_X = 2 < |z| < \infty$
που δεν καταλήγει στο ROC_Y
και δίνει $Y(z)$ ασταθές

ROC_H: $|z| < 2$, αριστερόπλευρο

(γ) Από το παραπάνω ερώτημα έχουμε:

$$H(z) = \frac{z(z+3/4)}{z-2} = \frac{z^2 + \frac{3}{4}z}{z-2}$$

Κάνοντας διαίρεση πολυωνύμων έχω:

$$H(z) = z + \frac{11}{4}\,\frac{z}{z-2} = z + \frac{11}{4}\,\frac{1}{1-2z^{-1}} \quad , |z| < 2$$

Άρα $\quad h[n] = \delta[n+1] - \frac{11}{4} 2^n u[-n-1]$

Ο πρώτος όρος, $\delta[n+1]$ είναι 0 παντού εκτός από $n=-1<0$.
Ο δεύτερος όρος, $-\frac{11}{4}2^n u[-n-1]$ είναι μηδέν για $n \geq 0$.

Επομένως $h[n]=0$ για $n \geq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα είναι αντι-αιτιατό.

Άσκηση 6

(α') $H(z) = \dfrac{z^5 - 4z^2 + 1}{z^4 + 2z^3 - 7z^2 - 8z + 12}$ διαίρεση πολυωνύμων

$$= z - 2 + \frac{\overbrace{11z^3 - 10z - 28z + 25}^{\rightarrow P(z)}}{z^4 + 2z^3 - 7z^2 - 8z + 12}$$

(Κάνω σχήμα Horner για την παραγοντοποίηση)

1	2	-7	-8	12	1
↓	1	3	-4	-12	
1	3	-4	-12	0	

$(z^3 + 3z^2 - 4z - 12)(z - 1) = 0$

Όμοια για την άλλη ρίζα που παρατηρώ ότι είναι για $z=2$

Οπότε, από το Horner παίρνουμε:

$(z^2 + 5z + 6)(z-1)(z-2) = 0 \Rightarrow$

$(z+2)(z+3)(z-1)(z-2) = 0$

Άρα

$$H(z) = z - 2 + \frac{P(z)}{(z+2)(z+3)(z-1)(z-2)}$$

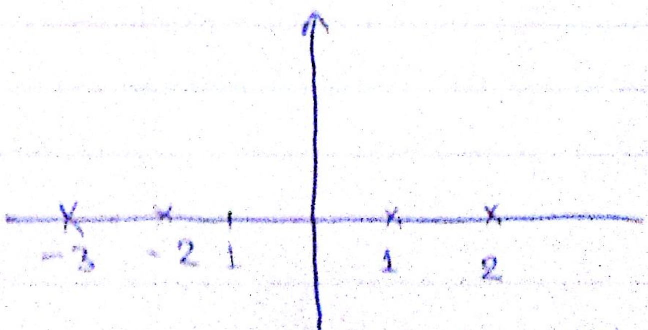
$$= z - 2 + \frac{A}{(z+2)} + \frac{B}{(z+3)} + \frac{\Gamma}{(z-1)} + \frac{\Delta}{(z-2)}$$

$A = \quad =$

$B = \quad =$

$\Gamma = \quad =$

$\Delta = \quad =$



α) $|z| > 3$

$h(n) = \delta[n+1] - 2\delta[n] + A(-2)^{n-1}u[n-1] + B(-3)^{n-1}u[n-1] + \Gamma\, u[n-1] + \Delta\, 2^{n-1}u[n-1]$

β) $|z| < 1$

$$h[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] - A(-2)^{-n+1} u[-n]$$
$$- B(-3)^{-n+1} u[-n] - \Gamma(+1)^{-n+1} u[-n]$$
$$- \Delta(+2)^{-n+1} u[-n]$$

γ) $1 < |z| < 2$

$$h[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] - A(-2)^{-n+1} u[-n]$$
$$- B(-3)^{-n+1} u[-n] + \underline{\Gamma\, u[n-1]} - \Delta\, 2^{-n+1} u[-n]$$

δ) $2 < |z| < 3$

$$h[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] + A(-2)^{n-1} u[n-1]$$
$$\underline{- B(-3)^{-n+1}} u[-n] + \Gamma\, u[n-1] + \Delta(+2)^{n-1} u[n-1]$$

(b')

$$H(z) = \frac{2}{1+z^{-4}}$$

$$1+z^{-4}=0 \Rightarrow z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1$$

$$z_k = \sqrt[4]{1}\cdot e^{j\frac{2k\pi+\pi}{4}} \quad , k=0,1,2,3$$

$$z_0 = e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (k=0)$$

$$z_1 = e^{j\frac{3\pi}{4}} \quad (k=1)$$

$$z_2 = e^{j\frac{5\pi}{4}} \quad (k=2)$$

$$z_3 = e^{j\frac{7\pi}{4}} \quad (k=3)$$

$$H(z) = \frac{A}{1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{B}{1-e^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{\Gamma}{1-e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{\Delta}{1-e^{j\frac{7\pi}{4}}z^{-1}}$$

$$A = H(z)\left(1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\left(1-e^{j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(1-e^{j\frac{5\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(1-e^{j\frac{7\pi}{4}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

$$A = \frac{2}{\left(1-e^{j\pi/2}\right)\left(1-e^{j\pi}\right)\left(1-e^{j\frac{3\pi}{2}}\right)}$$

$$A = \frac{\cancel{2}}{(1-j)\,\cancel{(1+1)}\,(1+j)} = \frac{1}{(1-j)(1+j)} = \frac{1}{2}.$$

$$B = H(z)\cdot\left(1-e^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\frac{3\pi}{4}}} = \ldots\ldots = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma = H(z)\left(1-e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\frac{5\pi}{4}}} = \ldots\ldots = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = H(z)\left(1-e^{j\frac{7\pi}{4}}z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\frac{7\pi}{4}}} = \ldots\ldots = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$H(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-e^{j\pi/4}z^{-1})} + \frac{1}{(1-e^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-1})} + \frac{1}{(1-e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1})} + \frac{1}{(1-e^{j\frac{7\pi}{4}}z^{-1})}\right)$$

Έχουμε 2 περιπτώσεις για το ROC:

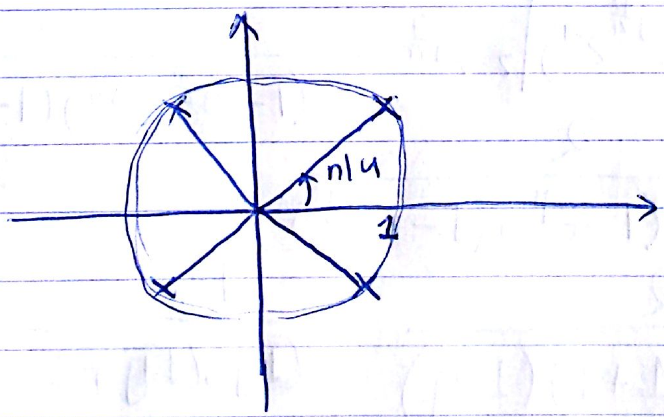
1) $|z| < 1$, αριστερόπλευρα

$$h[n] = -\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n}u[-n-1] + e^{j\frac{3\pi}{4}n}u[-n-1] + e^{j\frac{5\pi}{4}n}u[-n-1] + e^{j\frac{7\pi}{4}n}u[-n-1]\right)$$

2) $|z| > 1$, δεξιόπλευρα

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n}u[n] + e^{j\frac{3\pi}{4}n}u[n] + e^{j\frac{5\pi}{4}n}u[n] + e^{j\frac{7\pi}{4}n}u[n]\right).$$

Δεν υπάρχει ο ΜΦ ούτε είναι ευσταθές αφού οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο



(γ')

$$H(z) = \frac{2z}{(z^2+4z+4)(z-2+j)} = \frac{2z}{(z+2)^2(z-(2-j))}$$

$$H(z) = \frac{A}{(z+2)} + \frac{B}{(z+2)^2} + \frac{\Gamma}{(z-(2-j))}$$

ισχυει εφοσον ειναι στη μορφη $\frac{P(z)}{Q(z)}$ και οχι $\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$

$$A = \frac{d}{dz}\left\{\frac{2z}{(z-(2-j))}\right\}\Bigg|_{z=-2} = \frac{2(z-(2-j))-2z}{(z-(2-j))^2}\Bigg|_{z=-2}$$

$$A = \frac{2(-2-2+j)+4}{(-2-2+j)^2} = \frac{-8+2j+4}{(-4+j)^2} = \frac{-8+2j+4}{16-8j-1} = \frac{2j-4}{15-8j}$$

$$B = H(z)(z+2)^2\Big|_{z=-2} = \frac{-4}{(-2-2+j)} = \frac{-4}{-4+j} = \frac{4}{4-j}$$

$$\Gamma = H(z)\cdot(z-(2-j))\Big|_{z=(2-j)} = \frac{2(2-j)}{(2-j+2)^2} = \frac{4-2j}{16-8j-1} = \frac{4-2j}{15-8j}$$

Άρα:

$$H(z) = \frac{2j-4}{15-8j}\cdot\frac{1}{(z+2)} + \frac{4}{4-j}\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{4-2j}{15-8j}\frac{1}{(z-(2-j))}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{2j-4}{15-8j}\frac{z^{-1}}{(1+2z^{-1})} + \frac{-2}{4-j}\frac{-2z^{-1}}{(1+2z^{-1})^2}z^{-1} + \frac{4-2j}{15-8j}\frac{z^{-1}}{(1-(2-j)z^{-1})}.$$

$\frac{-2z^{-1}}{(1+2z^{-1})^2} \to -n(-2)^n u[-n-1]$

Για το ROC έχουμε 3 περιπτώσεις:

$|2-j| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$

1) $|z|<2$, αριστερόπλευρα

$$h[n] = -\frac{2j-4}{15-8j}(-2)^{n-1}u[-n] + \frac{2}{4-j}(n-1)(-2)^{n-2}u[-n] + \frac{4-2j}{15-8j}(2-j)^{n-1}u[-n]$$

2) $|z| > |2-j| = \sqrt{5} \approx 2{,}24$, δεξιόπλευρα

$$h[n] = \frac{2j-4}{15-8j}(-2)^{n-1}u[n-1] + \frac{-2}{4+j}(n-1)(-2)^{n-1}u[n-1]$$

$$+ \frac{4-2j}{15-8j}(2-j)^{n-1}u[n-1]$$

3) $2 < |z| < \sqrt{5}$

$$h[n] = \frac{2j-4}{15-8j}(-2)^{n}u[n-1] + \frac{-2}{4-j}(n-1)(-2)^{n-1}u[n-1]$$

$$+ \frac{4-2j}{15-8j}(2-j)^{n-1}u[n]$$