ΣΕΙΡΑ 2

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-2j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-4j\omega}}, \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

a) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

Τρόποι λύσης: i) Εύρεση $h[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

ii) $X(e^{j\omega})$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

$$y[n] = F^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}$$

iii) Το $x[n]$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων. Αφού οι εκθετικές μιγαδικές συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος δηλαδή ισχύει:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n] = H(e^{j\omega_0})x[n]$$

Άρα

$$x[n] = \frac{e^{j\frac{\pi n}{4}} - e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2j} = \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{4}} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{4}}$$

$$y[n] = \frac{1}{2j}H(e^{j\frac{\pi}{4}}) \cdot e^{j\frac{\pi n}{4}} - \frac{1}{2j}H(e^{-j\frac{\pi}{4}}) \cdot e^{-j\frac{\pi n}{4}}$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = \frac{1-e^{-2j\frac{\pi}{4}}}{1+\frac{1}{2}e^{-4j\frac{\pi}{4}}} = \frac{1-e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1+j}{1+\frac{1}{2}(-1)} =$$

$$= \frac{1+j}{\frac{1}{2}} = 2+2j$$

$$H(e^{-j\frac{\pi}{4}}) = \frac{1-e^{j\frac{\pi}{2}}}{1+\frac{1}{2}e^{j\pi}} = 2-2j$$

$$y[n] = \frac{2+2j}{2j} e^{j\frac{\pi n}{4}} - \frac{2-2j}{2j} e^{-j\frac{\pi n}{4}}$$

$$= \frac{(1+j)}{j} e^{j\frac{\pi n}{4}} - \frac{(1-j)}{j} e^{-j\frac{\pi n}{4}} =$$

$$= (-j+1) e^{j\frac{\pi n}{4}} + (j+1) e^{-j\frac{\pi n}{4}}$$

ή $2+2j = 2(1+j) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$$= 2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Αντίστοιχα $2-2j = 2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$$y[n] = \frac{2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi n}{4}} - 2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2j} =$$

$$= 2\sqrt{2}\, \frac{e^{j\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2j} =$$

$$= 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

β) $$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-2j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega 4}}$$

Θέτουμε $e^{j\omega} = p$

$$H(p) = \frac{1-p^{-2}}{1+\frac{1}{2}p^{-4}}$$

Μπορώ να εφαρμόσω PFE διότι βαθμός παρονομαστή > βαθμό αριθμητή

Εύρεση πόλων ώστε να παραγοντοποιήσω τον παρονομαστή

$$1+\frac{1}{2}p^{-4}=0 \Rightarrow p^4+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow p^4=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$p^4=\frac{1}{2}\cdot e^{j\pi} \Rightarrow p_k=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\, e^{j\frac{2k\pi+\pi}{4}}$$ διότι

$$\boxed{z^\nu=a \Rightarrow z^\nu=\underbrace{|a|\cdot e^{j\varphi}}_{a} \Rightarrow z=\sqrt[k]{|a|}\cdot e^{j\frac{2k\pi+\varphi}{\nu}},\ k=0,1,\dots,\nu-1}$$

(Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ Λυκείου)

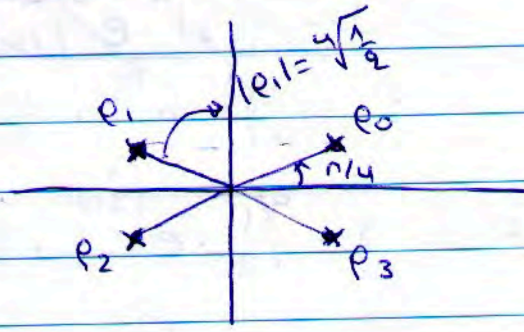
Άρα

$$p_0=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$p_1=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$p_2=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\, e^{j\frac{5\pi}{4}}$$

$$p_3=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\, e^{j\frac{7\pi}{4}}$$



Επομένως

$$H(p)=\frac{A}{1-p_0e^{-j\omega}}+\frac{B}{1-p_1e^{-j\omega}}+\frac{\Gamma}{1-p_2e^{-j\omega}}+\frac{\Delta}{1-p_3e^{-j\omega}}$$

και επομένως

$$h[n]=A\cdot p_0^n u[n]+B p_1^n u[n]+\Gamma p_2^n u[n]+\Delta p_3^n u[n]$$

p_0, p_1, p_2, p_3 γνωστά

Εύρεση συντελεστών;

$$A = H(p)(p-p_0)\Big|_{p=p_0} =$$

$$= \frac{1-p^{-2}}{\cancel{(1-p_0p^{-1})}(1-p_1p^{-1})(1-p_2p^{-1})(1-p_3p^{-1})}\cancel{(1-p_0p^{-1})}\Big|_{p=p_0}$$

$$= \frac{1-p_0^{-2}}{\underbrace{(1-p_1p_0^{-1})}_{a_1}\underbrace{(1-p_2p_0^{-1})}_{a_2}\underbrace{(1-p_3p_0^{-1})}_{a_3}}$$

$$a_1 = 1-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\cdot e^{j3\pi/4}\cdot\left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^{-1} = 1-e^{j\frac{3\pi}{4}-j\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 1-e^{j\frac{2\pi}{4}} = 1-e^{j\frac{\pi}{2}} = 1-j$$

$$a_2 = 1-p_2p_0^{-1} = 1-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\cdot e^{j\frac{5\pi}{4}}\cdot\left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^{-1} = 1-e^{j\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 1-e^{j\pi} = 1-(-1) = 2$$

$$a_3 = 1-p_3p_0^{-1} = 1-e^{j\left(7\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = 1-e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1-(-j) = 1+j$$

$$1-p_0^{-2} = 1-\left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^{-2} = 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{4}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 1-\sqrt{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1-\sqrt{2}(-j) = 1+\sqrt{2}j$$

$$A = \frac{1+\sqrt{2}j}{2(1-j)(1+j)} = \frac{1+\sqrt{2}j}{4}$$

Ομοίως για Β, Γ, Δ

γ) $H(e^{jω}) = \dfrac{1-e^{-2jω}}{1+\frac{1}{2}e^{-j4ω}}$

μέτρο:

$$|H(e^{jω})| = \left|\frac{1-e^{-2jω}}{1+\frac{1}{2}e^{-j4ω}}\right| = \frac{|1-e^{-2jω}|}{|1+\frac{1}{2}e^{-j4ω}|} =$$

$$= \frac{|1-\cos(-2ω)-j\sin(-2ω)|}{|1+\frac{1}{2}\cos(-4ω)+\frac{j}{2}\sin(-4ω)|} =$$

$$= \frac{|1-\cos2ω+j\sin2ω|}{|1+\frac{1}{2}\cos4ω-\frac{j}{2}\sin4ω|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\cos2ω)^2+\sin^2 2ω}}{\sqrt{(1+\frac{1}{2}\cos4ω)^2+\frac{1}{4}\sin^2 4ω}} = \sqrt{\frac{2-2\cos2ω}{\frac{5}{4}+\cos4ω}}$$

$$\measuredangle H(e^{jω}) = \measuredangle \frac{1-\cos2ω+j\sin2ω}{1+\frac{1}{2}\cos4ω-\frac{1}{2}\sin4ω}$$

πολ/ζω τε συζυγή
μιγαδικό του
παρονομαστή

$$= \measuredangle \frac{(1-\cos2ω+j\sin2ω)(1+\frac{1}{2}\cos4ω+\frac{j}{2}\sin4ω)}{(1+\frac{1}{2}\cos4ω-\frac{j}{2}\sin4ω)(1+\frac{1}{2}\cos4ω+\frac{j}{2}\sin4ω)} =$$

με συμφέρει να γυρίσω πίσω
διότι έχω πολιστό

$$\cdot k \; \frac{(1-e^{-2jw})(1+\frac{1}{2}e^{-j4w})}{(1+\frac{1}{2}\cos 4w)^2 + \frac{\sin^2 4w}{4}} =$$

$$= k \; \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j4w} - e^{-2jw} - \frac{1}{2}e^{-2jw}\cdot e^{-j4w}}{\frac{5}{4} + \cos 4w} =$$

$$= k \; \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j4w} - e^{-2jw} - \frac{1}{2}e^{-j6w}}{\frac{5}{4} + \cos 4w} =$$

$$= k \; \frac{1+\frac{1}{2}\cos 4w - \frac{j}{2}\sin 4w - \cos 2w + j\sin 2w - \frac{1}{2}\cos 6w + \frac{j}{2}\sin 6w}{\frac{5}{4}+\cos 4w}$$

$$= k \; \frac{1+\frac{1}{2}\cos 4w - \cos 2w - \frac{1}{2}\cos 6w}{\frac{5}{4}+\cos 4w} + j\,\frac{-\frac{1}{2}\sin 4w + \sin 2w + \frac{1}{2}\sin 6w}{\frac{5}{4}+\cos 4w}$$

$$= \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin 4w + \sin 2w + \frac{1}{2}\sin 6w}{1+\frac{1}{2}\cos 4w - \cos 2w - \frac{1}{2}\cos 6w}\right)$$

8) $$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{1-e^{-2jw}}{1+\frac{1}{2}e^{-j4w}} \Rightarrow$$

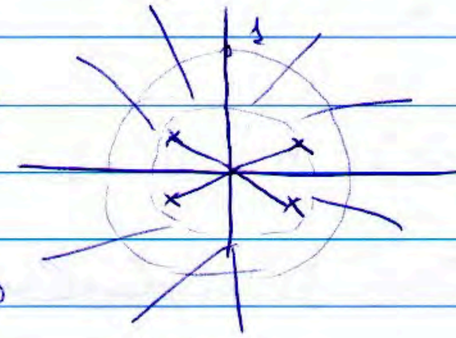
$$Y(e^{jw}) + \frac{1}{2}e^{-j4w}Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) - X(e^{jw})\cdot e^{-2jw}$$

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-4] = x[n] - x[n-2]$$

ε) $h[n] = A\rho_0^n u[n] + B\rho_1^n u[n] + \Gamma\rho_2^n u[n] + \Delta\rho_3^n u[n]$ (1)

οπου $|\rho_i| = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} < 1$

Ολες οι ριζες βρισκονται εντος του μοναδιαιου κυκλου



- Επειδη ∃ ο Μ.F το σύστημα ειναι ευσταθές δηλ περιλαμβανει τον μοναδιαιο κυκλο
- Βασει της (1) ειναι δεξιόπλευρο και αιτιατό. Αυτο φαινεται και απο το πεδιο συγκλισης $\left(|z| > |\rho_i| = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

2] $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{-j\omega n} - 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{-j\omega n} - 1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{j\omega}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^{n} - 1 =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} - 1$$

συγκλινει επειδη $\left|\frac{1}{2} e^{j\omega}\right| < 1$

συγκλινει επειδη $\left|\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right| = \frac{1}{2} < 1$

β) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad -M \leq n \leq M$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^{M} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-M}^{M} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{-M} - \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{+M+1}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

γ) $x_2[n] = n a^n u[n] \quad , \quad |a|<1$

Χρησιμοποιω την ιδιοτητα της παραγωγου:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$n x[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Αρα $\quad a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \quad , \quad |a|<1$

$$n a^n u[n] \longleftrightarrow j \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right\}$$

$$X_1(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right\} = j \cdot \frac{-(1-ae^{-j\omega})'}{(1-ae^{-j\omega})^2} =$$

$$= j \frac{a(-j) \cdot e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2} = \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

δ) $x_3[n] = a^n u[n-3] \quad , \quad |a|<1$

<u>α τροπος</u>

$$X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n-3] e^{-j\omega n} = \sum_{n=3}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot e^{-j\omega})^n - (1 + ae^{-j\omega} + a^2 e^{-2j\omega})$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} - (1 + ae^{-j\omega} + a^2 e^{-2j\omega}) = \longrightarrow$$

$$= \frac{1 - (1-ae^{-j\omega}) - ae^{-j\omega}(1-ae^{-j\omega}) - a^2e^{-2j\omega}(1-ae^{-j\omega})}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{ae^{-j\omega}} - \cancel{ae^{-j\omega}} + \cancel{a^2e^{-2j\omega}} - \cancel{a^2e^{-2j\omega}} + a^3e^{-3j\omega}}{1-ae^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{a^3e^{-3j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

β τροπος: (ιδιοτητα χρονικης μετατοπισης)

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$
$$x[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega n_0}$$

$$a^n u[n-3] = a^{n-3} \cdot a^3 u[n-3] = a^3 a^{n-3} u[n-3]$$

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^{n-3} u[n-3] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \cdot e^{-j\omega 3}$$

$$a^3 \cdot a^{n-3} u[n-3] \longleftrightarrow \frac{a^3 \cdot e^{-j\omega 3}}{1-ae^{-j\omega}}$$

ε) $x_4[n] = n a^n u[n+2]$

Γνωρίζουμε: $n a^n u[n] \longleftrightarrow \dfrac{a e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$

και $x_6[n] = a^{n+2} u[n+2] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \cdot e^{j\omega 2} = X_6(e^{j\omega})$

Από αυτούς τους γνωστούς ΜΦ πρέπει να βρούμε $X_4(e^{j\omega})$

Έστω:

$$x_5[n] = (n+2) a^{n+2} u[n+2] = (n+2) a^n a^2 u[n+2] =$$

$$= a^2 \underbrace{n a^n u[n+2]}_{x_4[n]} + 2a^{n+2} u(n+2])$$

$$x_4[n] = \frac{1}{a^2}\, x_5[n] - 2a^n u[n+2] \big) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\, (n+2) a^{n+2} u[n+2] - 2a^{n+2} u[n+2]$$

Όμως

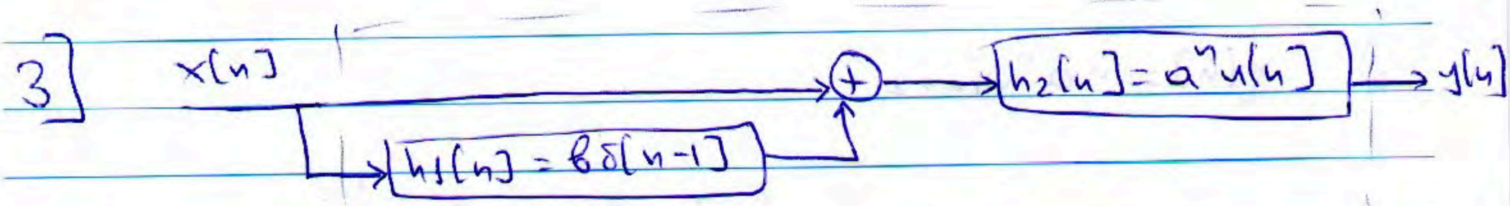
$$x_5[n] = (n+2) a^{n+2} u[n+2] \longleftrightarrow \underbrace{\frac{a e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}}\cdot e^{j\omega 2}$$

DTFT $n a^n u[n]$ + χρονική εξαγωγή κατά −2

Άρα

$$X_4(e^{j\omega}) = \frac{1}{a^2}\, \underbrace{\frac{a e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}\, e^{2j\omega}}_{X_5(e^{j\omega})} - 2\, \underbrace{\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\, e^{j\omega 2}}_{X_6(e^{j\omega})}$$

3]



Απο το σχήμα :

$$\left(x[n] * h_1[n] + x[n]\right) * h_2[n] = y[n]$$

$$y[n] = h_2[n] * x[n] + h_2[n] * h_1[n] * x[n] =$$

$$= \underbrace{\left(h_2[n] + h_2[n] * h_1[n]\right)}_{h[n]} * x[n] =$$

$$= h[n] * x[n]$$

Άρα $h[n] = h_1[n] * h_2[n] + h_2[n] =$

$$h[n] = \left(\beta\delta[n-1] * a^n u[n]\right) + a^n u[n]$$

$$= a^{n-1}\beta\, u[n-1] + a^n u[n]$$

β) $H(e^{j\omega}) = F\{a^{n-1}\beta\, u[n-1]\} + F\{a^n u[n]\} =$

$$= \beta\, F\{a^{n-1}u[n-1]\} + F\{a^n u[n]\} =$$

$$= \beta \cdot F\{a^{n-1} u[n-1]\} + F\{a^n u[n]\} =$$

$$= \beta \frac{e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$, Εφόσον $|a|<1$

γ) $\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \dfrac{\beta e^{-j\omega}+1}{1-ae^{-j\omega}} \Rightarrow$

$Y(e^{j\omega}) - aY(e^{j\omega})\cdot e^{-j\omega} = b e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})$

$y[n] - a y[n-1] = b\, x[n-1] + x[n]$

δ) $h[n] = a^{n-1} b u[n-1] + a^{n} u[n]$ σύστημα αιτιατό
ευσταθές εφόσον $|a|<1$

4) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{-j\omega n}$

α) $X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = -1+1+2+1+1+2+1+(-1) =$
$= 6$

β) $X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot(-1)^{n}$

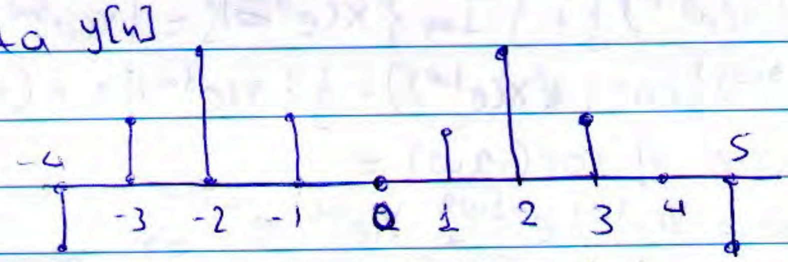
αφού η όπως είναι ~~περιττό~~
περιττό η αλλάζει πρόσημο

$1+(-1)+2+(-1)+(-1)+2+(-1)+1 =$
$= 2$

γ) $\measuredangle X(e^{j\omega}) = ;$

Συμμετρικά σήματα ως προς την αρχή των αξόνων έχουν μηδενική φάση. Άρα αν έχουμε το παρακάτω σήμα y[n]

$\measuredangle Y(e^{j\omega}) = 0$



Παρατηρώ ότι $y[n-2] = x[n]$

Οπότε $Y(e^{j\omega})\cdot e^{-2j\omega} = X(e^{j\omega})$

$\measuredangle X(e^{j\omega}) = \measuredangle Y(e^{j\omega}) - 2\omega \Big\}\ \measuredangle X(e^{j\omega}) = -2\omega$

Όμως $\measuredangle Y(e^{j\omega}) = 0$

δ) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}\,d\omega \quad \overset{n=0}{\Longrightarrow}$$

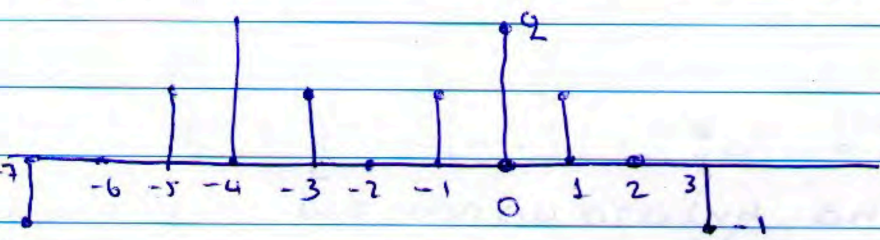
$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega = 2\pi\, x(0) \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$$

ε) $X(e^{+j\omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{-j\omega n}$

$$X(e^{-j\omega}) \overset{\text{όπου } \omega \to -\omega}{=\!=\!=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{j\omega n} \overset{\text{όπου } n \to -n}{=\!=\!=} \sum_{n=\infty}^{-\infty} x[-n]\cdot e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]\, e^{-j\omega n}$$ Άρα το $\underline{x[-n]}$ έχει Μ.Φ $X(e^{-j\omega})$



στ) $X(e^{j\omega}) = Re\{X(e^{j\omega})\} + j\,Im\{X(e^{j\omega})\} = |X(e^{j\omega})|\cdot e^{j\measuredangle X(e^{j\omega})}$

$= |X(e^{j\omega})|\cos(\measuredangle X(e^{j\omega})) + j\,|X(e^{j\omega})|\sin(\measuredangle X(e^{j\omega}))$

Άρα $Re\{X(e^{j\omega})\} = |X(e^{j\omega})|\cdot\cos(-2\omega) =$

$$= Y(e^{j\omega})\cdot\cos 2\omega = \frac{Y(e^{j\omega})}{2}e^{-j\omega 2} + \frac{Y(e^{j\omega})\cdot e^{+2j\omega}}{2} \Rightarrow$$

$$x_r[n] = \frac{1}{2}y[n-2] + \frac{1}{2}y[n+2]$$