ΣΕΙΡΑ 1

1) a) $x[n] = \delta[n-1]$

$h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1]$

$x[n] * h[n] = \delta[n-1] * (2\delta[n] + \delta[n-1]) =$

$= 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

b) $x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1]$

$h[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$x[n]*h[n] = (2\delta[n] - \delta[n-1]) * (-\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) =$

$= -2\delta[n]*\delta[n] + 4\delta[n]*\delta[n-1] + 2\delta[n]*\delta[n-2]$

$+ \delta[n]+\delta[n-1] - 2\delta[n-1]*\delta[n-1] - \delta[n-1]*\delta[n-2] =$

$= -2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$

$- \delta[n-3] =$

$= -2\delta[n] + 5\delta[n-1] - \delta[n-3]$

c) $x[n] = \sum_{k=0}^{4} \delta[n-k]$

$h[n] = \sum_{m=2}^{7} \delta[n-m] + \sum_{m=11}^{16} \delta[n-m]$

$x[n]*h[n] = \left(\sum_{m=2}^{7} \delta[n-m] + \sum_{m=11}^{16} \delta[n-m] \right) * \sum_{k=0}^{4} \delta[n-k]$

$= \sum_{k=0}^{4} \sum_{m=2+k}^{7+k} \delta[n-m] + \sum_{k=0}^{4} \sum_{m=11+k}^{16+k} \delta[n-m] =$

$= \sum_{m=2}^{7} \delta[n-m] + \sum_{m=3}^{8} \delta[n-m] + \sum_{m=4}^{9} \delta[n-m] + \dots + \sum_{m=6}^{11} \delta[n-m] +$

$+ \sum_{m=11}^{16} \delta[n-m] + \dots + \sum_{m=15}^{20} \delta[n-m]$

<u>β τρόπος</u>

$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$

$h[n] = u[n-2] - u[n-8] + u[n-11] - u[n-17]$

$$x[n] * h[n] = \left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]\right) * \left(u[n-2] - u[n-8] + u[n-11] - u[n-17]\right) =$$

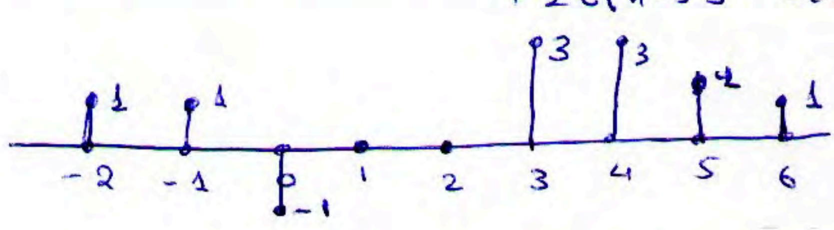
$$\begin{aligned} = {} & u[n-2] - u[n-8] + u[n-11] - u[n-17] + \\ & u[n-3] - u[n-9] + u[n-12] - u[n-18] + \\ & u[n-4] - u[n-10] + u[n-13] - u[n-19] + \\ & u[n-5] - u[n-11] + u[n-14] - u[n-20] + \\ & u[n-6] - u[n-12] + u[n-15] - u[n-21] \end{aligned}$$

d) $x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$

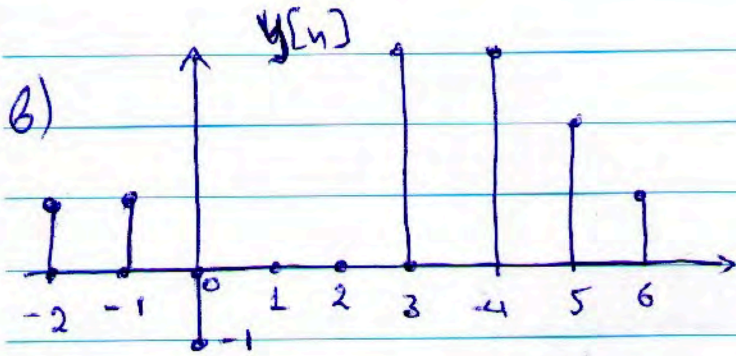
$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$

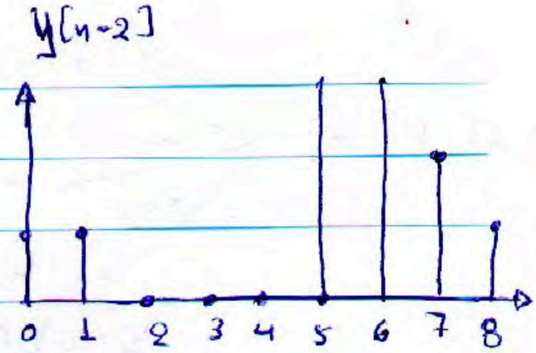
$$\begin{aligned} x[n] * h[n] = {} & \left(\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]\right) + \delta[n] - \\ & - \left(\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]\right) * \delta[n-1] \\ & + \left(\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]\right) * \delta[n-4] \\ & + \left(\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]\right) * \delta[n-5] \\ = {} & \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] - \\ & - \delta[n+1] - 2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2] \\ & + \delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5] \\ & + \delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5] + \delta[n-6] = \end{aligned}$$

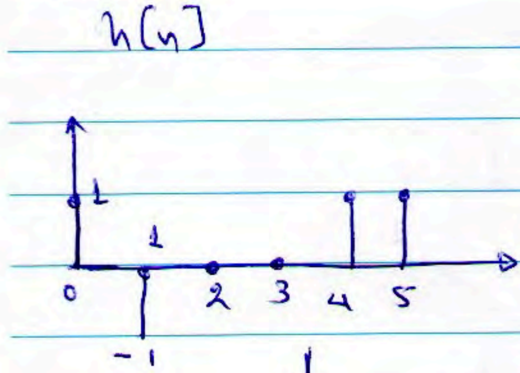
$$= \delta[n+2] + \delta[n+1] - \delta[n] + 3\delta[n-3] + 3\delta[n-4] + 2\delta[n-5] + \delta[n-6]$$

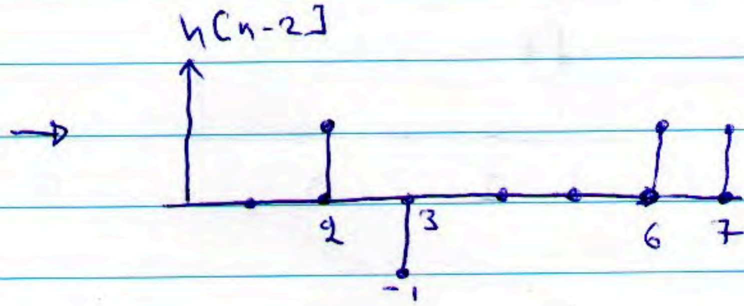


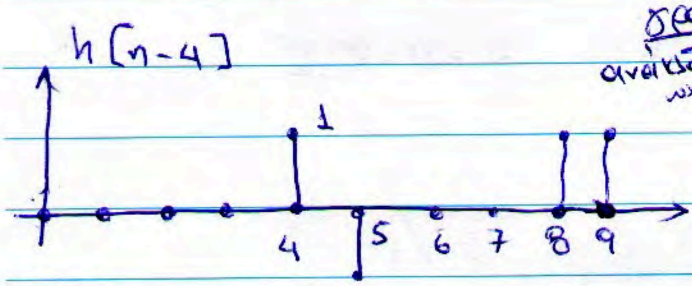
β)

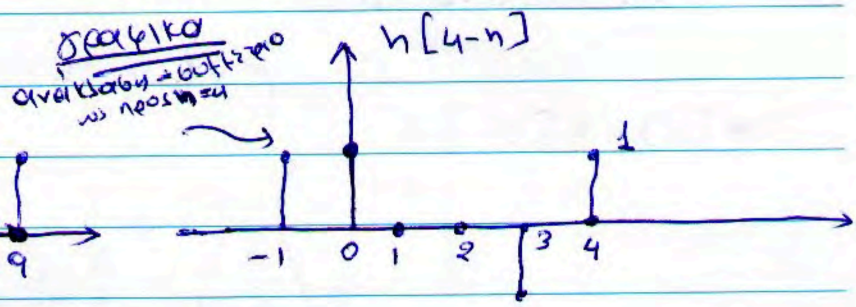












<u>εύρεση h[4-n] με μαθηματικό τρόπο</u>

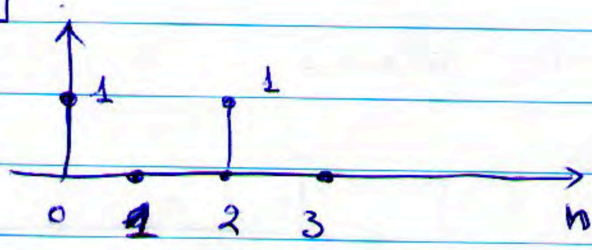
$$g[n] = h[4-n] = \begin{cases} 1 & 4-n=0,\ 4-n=4,\ 4-n=5 \\ 0 & \text{αλλού} \\ -1 & ,\ 4-n=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$g[n] = \begin{cases} 1 & ,\ n=4,\ n=0,\ n=-1 \\ 0 & \text{αλλού} \\ -1 & ,\ n=3 \end{cases}$$

iii)

$$g[n] = h[2n] \quad \begin{cases} \xrightarrow{n=0} h[0] = 1 \\ \xrightarrow{n=1} h[2] = 0 \\ \xrightarrow{n=2} h[4] = 1 \\ \xrightarrow{n=3} h[6] = 0 \end{cases}$$

$g[n]$



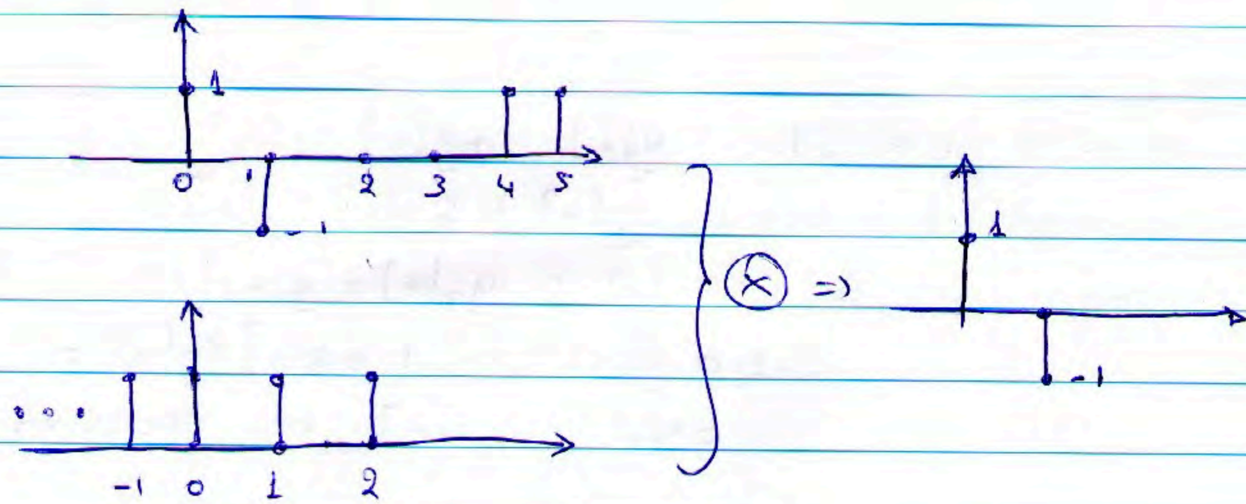
Με μαθηματικο τροπο

$$g[n] = h[2n] = \begin{cases} 1 & 2n=0 \;,\; 2n=4 \;,\; \underline{\underline{2n=5}} \\ 0 & \\ -1 & \underline{\underline{2n=3}} \end{cases} =$$

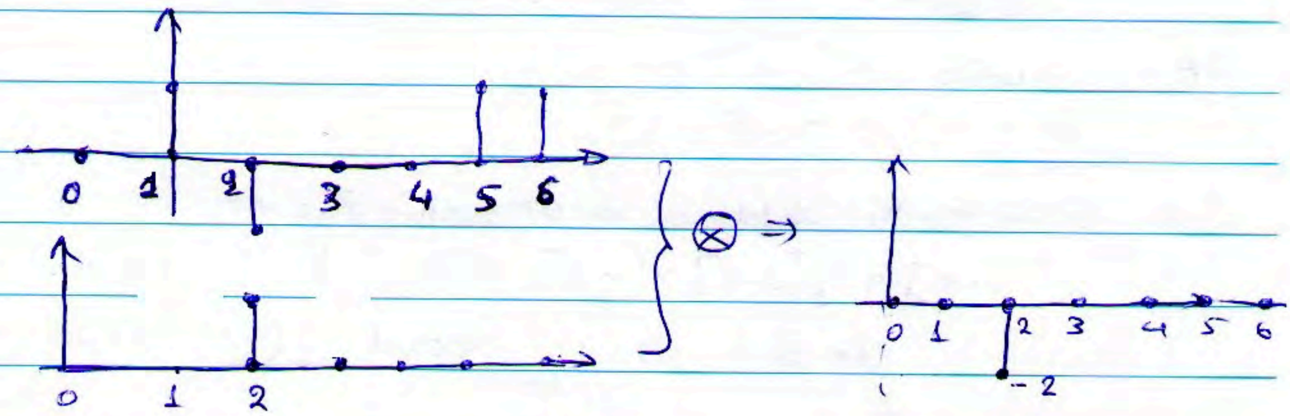
→ δεν ∃ ακεραιο n

$$= \begin{cases} 1 \;, & n=0,\; n=2 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

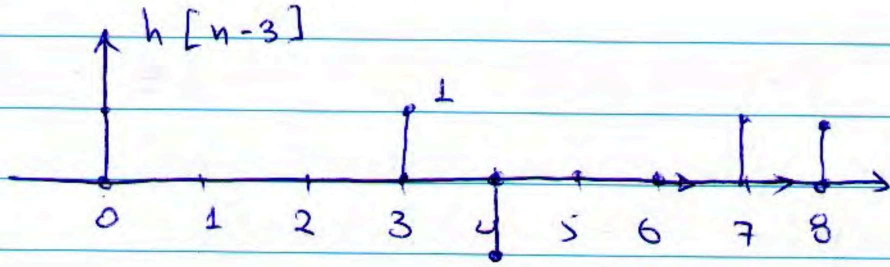
iv) $h[n]u[2-n]$



v) $h[n-1]\delta[n-2]$



vi) $h[n-1] + \delta[n-2] = h[n-3]$



2) i) $y[n]=g[n]x[n]$

Γραμμικότητα:

είσοδος $a x_1[n]$: $y_1[n] = a g[n] x_1[n]$

είσοδος $b x_2[n]$: $y_2[n] = b g[n] x_2[n]$

είσοδος $a x_1[n] + b x_2[n]$: $y_3[n] = g[n]\left(a x_1[n] + b x_2[n]\right)$

$= a g[n] x_1[n] + b g[n] x_2[n] =$

$= y_1[n] + y_2[n]$ άρα γραμμικό

αιτιατό διότι $y[n]$ εξαρτάται μόνο από παρούσες τιμές της $x[n]$

ΧΑ: είσοδος $x[n-k]$:

$y_1[n] = g[n] x[n-k]$

Για $n \to n-k$

$y[n-k] = g[n-k] x[n-k] \neq y_1[n]$ άρα χρονικά μεταβαλλόμενο

Ευστάθεια

Έστω $|x[n]| \leq B_x$, $B_x \in \mathbb{R}$

$$|y[n]| = |g[n] x[n]| = |g[n]|\,|x[n]| \leq |g[n]| B_x$$

Η ευστάθεια εξαρτάται από την $g[n]$. Αν $g[n]$ φραγμένη τότε $y[n]$ ευσταθές.

ii) $y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

Γραμμικότητα

είσοδος $a x_1[n]$: $y_1[n] = \sum_{k=n_0}^{n} a x_1[k]$

είσοδος $b x_2[n]$: $y_2[n] = \sum_{k=n_0}^{n} b x_2[k]$

είσοδος $a x_1[n] + b x_2[n]$: $y_3[n] = \sum_{k=n_0}^{n} a x_1[k] + b x_2[k]$

$= \sum_{k=n_0}^{n} a x_1[k] + \sum_{k=n_0}^{n} b x_2[k] = y_1[n] + y_2[n]$

γραμμικό

Αιτιατό: προφανώς για $n_0 < n$ είναι αιτιατό διότι η παρούσα τιμή του $y[n]$ εξαρτάται από $n - n_0$ παρελθοντικές τιμές.
Αν $n_0 > n$ δεν είναι αιτιατό αλλά όπως έχει δοθεί το άθροισμα υποθέτουμε $n_0 < n$ και επομένως είναι αιτιατό

ΧΑ: Για είσοδο $x[n-n_0]$: $y_1[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k-n_0] = \sum_{k=0}^{n-n_0} x[k] \neq y[n-n_0] = \sum_{k=n_0}^{n-n_0} x[k]$

δεν είναι ΧΑ

Ευστάθεια:

$y[n] = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

$|y[n]| = \left| \sum_{k=n_0}^{n} x[k] \right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |x[k]| = (n-n_0) B_x$

Αν $n \to \infty$ $y[n]$ δεν είναι φραγμένη.

iii) $y[n] = e^{x[n]}$

Γραμμικότητα: είσοδος $a x_1[n]$: $y_1[n] = e^{a x_1[n]}$

είσοδος $b x_2[n]$: $y_2[n] = e^{b x_2[n]}$

είσοδος $a x_1[n] + b x_2[n]$: $y_3[n] = e^{a x_1[n] + b x_2[n]} =$

$= e^{a x_1[n]} \cdot e^{b x_2[n]} \neq y_1[n] + y_2[n]$

μη γραμμικό

Προφανώς είναι αιτιατό

Ευστάθεια: Έστω $|x[n]| \le B_x$

$$|y[n]| = |e^{x[n]}| \le e^{|x[n]|} \le e^{B_x}$$

Άρα ευσταθές

ΧΑ: Για είσοδο $x[n-n_0]$

$$y_1[n] = e^{x[n-n_0]} = y[n-n_0]$$. Άρα

χρονικά αμετάβλητο

(v) $y[n] = x[n] + 3u[n+1]$

για είσοδο $a x_1[n]$: $y_1[n] = a x_1[n] + 3u[n+1]$

" " $b x_2[n]$: $y_2[n] = b x_2[n] + 3u[n+1]$

για είσοδο $a x_1[n] + b x_2[n]$:

$$y_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] + 3u[n+1] \neq$$
$$y_1[n] + y_2[n]$$ δεν είναι γραμμικό

Αιτιατό: ναι διότι εξαρτάται από παρούσες τιμές της εισόδου

Χ.Α: για είσοδο $x[n-n_0]$

$$y_1[n] = x[n-n_0] + 3u[n+1] \neq y[n-n_0] =$$
$$x[n-n_0] + 3u[n-n_0+1]$$

δεν είναι ΧΑ.

Ευσταθές:

$$|x[n]| \le B_x$$

$$|y[n]| = |x[n] + 3u[n+1]| \le$$
$$\le |x[n]| + |3u[n+1]| \le B_x + 3$$ φραγμένο

3) α) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{3}\right)}$

$x[n+N] = e^{j\left(\pi \frac{n+N}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{j\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi N}{6}\right)} =$

$= e^{j\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{j\frac{\pi N}{6}}$

Για να ειναι περιοδικό πρέπει $e^{j\frac{\pi}{6}N} = 1 \Rightarrow$

$\frac{\pi}{6}N = 2k\pi \Rightarrow N = 12k,$

Για $k=1$, N ακέραιος $N=12$ (περιοδος)

β) $x[n] = e^{j\frac{3\pi n}{4}}$

$x[n+N] = e^{j\frac{3\pi}{4}(n+N)} = e^{j\frac{3\pi n}{4}} \cdot e^{j\frac{3\pi N}{4}}$

$\frac{3\pi N}{4} = 2k\pi \Rightarrow N = \frac{8k}{3}$, $N = 8$ περιοδος

γ) $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}$

Το sin() ειναι περιοδική συναρτηση, ομως ο παρονομαστης δεν ειναι. Το $x[n]$ δεν ειναι περιοδικο

$x[n+N] = \frac{f(n+N)}{\pi(n+N)} = \frac{f(n)}{\pi(n+N)} \neq x[n]$

δ) $x[n] = e^{\frac{j\pi n}{\sqrt{2}}}$

$x[n+N] = e^{\frac{j\pi(n+N)}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{j\pi n}{\sqrt{2}}} \cdot e^{\frac{j\pi N}{\sqrt{2}}}$

$\frac{\pi N}{\sqrt{2}} = 2k\pi \Rightarrow N = 2k\sqrt{2}.$

$\nexists k \in \mathbb{Z} : N \in \mathbb{Z}$. Επομένως δεν ειναι περιοδικο

4i) $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

ii) $\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{-k=-\infty}^{0} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$

iii) $\sum_{k=-2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 4+2+2 = 8$

iv) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

v) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k+2] = \sum_{k=-2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{(iii)}{=\!=} 8$

vi) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k u[-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k \overset{(ii)}{=\!=} 2$

β) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] \overbrace{u[n-k-2]}^{n-k-2 \geq 0 \Rightarrow k \leq n-2} = \sum_{k=-\infty}^{n-2} a^k \overbrace{u[k]}^{k \geq 0} =$

$= \sum_{k=0}^{n-2} a^k = \frac{a^0 - a^{n-2+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n-1}}{1-a}$

γ) $x[n] * u[n-2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] u[n-k-2] =$

$= \frac{1-a^{n-1}}{1-a}$