

## Σύντομη Εισαγωγή στην Θεωρία Ανάλυσης Αποφάσεων

Γιάννης Τζιτζίκας  
Οκτώβριος 2005

Πανεπιστήμιο Κρήτης

## Διάθρωση Παρουσίασης

Θεωρία Αποφάσεων - Θεωρία Χρησιμότητας

- Απλές Αποφάσεις με Αβεβαιότητα
- Δέντρα αποφάσεων (decision trees)
- Αποφάσεις και Πειραματισμός
- Συναρτήσεις χρησιμότητας (και ρίσκο) (utility functions)
- Αποφάσεις βάσει Πολλαπλών κριτηρίων και Βεβαιότητα (tradeoffs)
- Αποφάσεις βάσει Πολλαπλών κριτηρίων και Αβεβαιότητα

October 2005

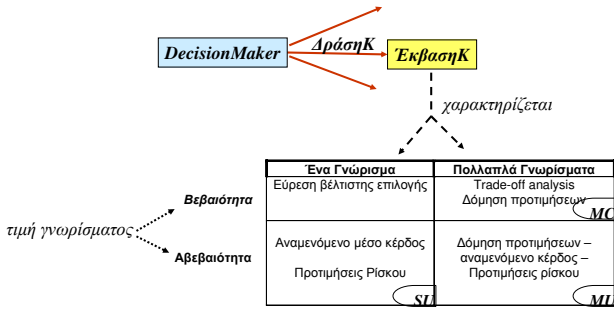
Yannis Tzitzikas, U. of Crete

2

## Θεωρία Αποφάσεων (Decision Analysis)

Ορθολογική μεθοδολογία για λήψη αποφάσεων  
βάσει ενός ή περισσότερων κριτηρίων,  
υπο συνθήκες βεβαιότητας ή αβεβαιότητας

Science of Management,  
Operations Research



October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

3

## Απλές Αποφάσεις υπο συνθήκες Αβεβαιότητας

SU

Το πρόβλημα:  $(A, \Theta, P(\theta), g(a, \theta))$   
**A:** σύνολο δυνατών Δράσεων  
 **$\Theta$ :** σύνολο Καταστάσεων Φύσης  
 **$P(\theta)$ :** κατανομή πιθανότητας (από διαίσθηση/εμπειρία)  
 **$g(a, \theta)$ :** αναμενόμενο κέρδος από δράση  $a$  όταν η  $\theta$  ισχύει

Πχ: Εκμετάλλευση γής (πετρέλαιο)

**$\Theta$ : Κατάσταση φύσης**  
 Βαρέλια: 20.000 10.000 0  
 $P(\theta_1) = 0.2$   $P(\theta_2) = 0.5$   $P(\theta_3) = 0.3$

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
<b>A1 (Γεώτρηση)</b>	20	10	-2
<b>A2 (Εκμίσθωση)</b>	4	4	4
<b>A3 (Εκμίσθ με %)</b>	8	5	0

**Αναμενόμενο κέρδος δράσης** (using Bayes rule):  
 $g(a) = E[g(a, \theta)] = \sum g(a, \theta) P(\theta = \theta)$

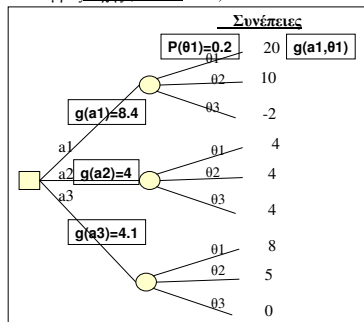
October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

4

## Δέντρα αποφάσεων

- Κόμβος απόφασης (Decision node)
- Κόμβος τύχης (Chance node)



Averaging out & folding back (backwards induction)

October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

5

## Αποφάσεις και Πειραματισμός

Πείραμα X

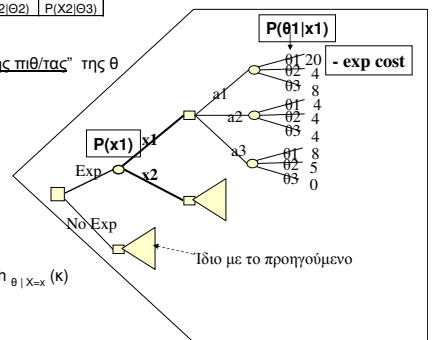
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
<b>Αποτέλεσμα πειράματος</b> $x_1$	$P(x_1 \theta_1)$	$P(x_1 \theta_2)$	$P(x_1 \theta_3)$
$x_2$	$P(x_2 \theta_1)$	$P(x_2 \theta_2)$	$P(x_2 \theta_3)$

Πείραμα => "posterior κατ'/μής πιθανότ'ας" της  $\theta$

$$P(\theta_j|X) = \frac{P(X|\theta_j) * P(\theta_j)}{\sum_i P(X|\theta_i) * P(\theta_i)}$$

**Αναμενόμενο κέρδος δράσης:**  
 $g(a) = E[g(a, \theta)] = \sum g(a, \theta) h_{\theta|X=x}(k)$

όπου  $g' = g - \text{cost}(\text{exp})$



October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

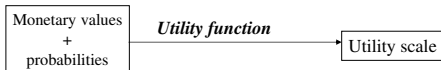
6

### Συναρτήσεις Χρησιμότητας (Utility Functions)

(0(0.5), 100(0.5)) ? 50  
 (0(0.5), 100(0.5)) ? (-50(0.5), 150(0.5))  
 (0(0.5), 1.000.000(0.5)) ? 500.000  
 (0(0.5), 1.000.000.000(0.5)) ? 200.000.000

ανάγκη

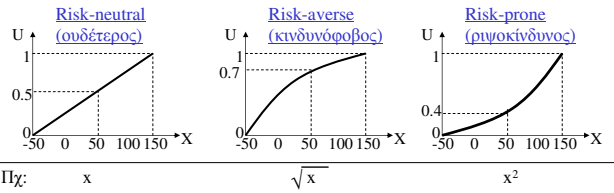
Μοντελοποίηση (ποιοτική και ποσοτική) «στάσης» απέναντι στον κίνδυνο



### Συναρτήσεις Χρησιμότητας (von Neumann & Morgenstern, 1940s)

- (1)  $x_1 < \dots < x_n$  (όλα τα  $g(a_i, \theta_j)$ )
- (2)  $x_i \sim < x_n, \pi_i, x_1 >$       πχ  $50 \sim < 150, 0.7, -50 >$
- (3)  $u(x_i) = \pi_i$        $u(x_1) = 0, \quad u(x_n) = 1$
- (4)  $u(a_j) = \sum \pi_i p_i^{a_j}$  (αντί  $u(a_j) = \sum x_i p_i^{a_j}$ ) **αναμενόμενη χρησιμότητα**

(0(0.5), 100(0.5)) ? (-50(0.5), 150(0.5))



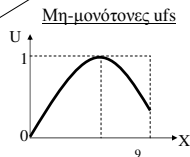
Πχ: x

### Μέθοδος Εύρεσης μιας Συναρτήσεως Χρησιμότητας

- 1) Προσδιορισμός μερικών  $\pi_i$
- 2) Συμπέρασμα ιδιοτήτων της  $u(\cdot)$ 
  - Risk Neutral
  - Risk Averse
    - constantly risk averse
    - degreasingly risk averse
  - Risk Prone

3) Εύρεση οικογένειας συναρτήσεων με ανάλογες ιδιότητες

4) Επιλογή κατάλληλων παραμέτρων



### Παραδείγματα Συναρτήσεων Χρησιμότητας

Risk aversion at x:  $r(x) = -u''(x)/u'(x)$

$u_1 \sim u_2 \iff r_1(x) = r_2(x)$  για κάθε x

Τύποι		Παραδείγματα
Constant R-A:	$r(x) = c > 0$ for all x	$u(x) = -e^{-2x}$
Decreasing R-A:		$u(x) = (x+k)^c, \quad 0 < c < 1$ $u(x) = \log(x+b)$
Constant R-P:	$r(x) = c < 0$ for all x	$u(x) = e^{-2x}$
Decreasing R-P:		$u(x) = x^2$

### Αποφάσεις βάσει Πολλαπλών Κριτηρίων (βεβαιότητα)

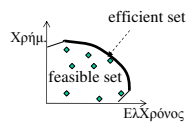
MC



πλήρες, λειτουργικό, διαίρετο, λιτό

- α1) Δόμηση στόχων
- α2) Επιλογή συνόλου γνωρισμάτων
- β) Δόμηση προτιμήσεων

### Άνευ Δόμησης Προτιμήσεων



### Δόμηση Προτιμήσεων

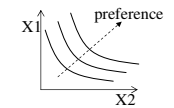
- (Α) Λεξιγραφική
  - <Χρήμα, Ελεύθερος Χρόνος, ...>
- (Β) Λεξιγραφική με κατώφλι
  - <Χρήμα(≥500), Ελεύθερος Χρόνος(≥10) >
  - (300, 11)
  - (350, 5)
  - (900, 2)
  - (500, 3)

### Δόμηση Προτιμήσεων (συν)

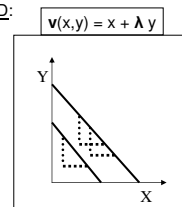
MC

- (Γ) Καμπύλες ισοπροτιμησης (indifference curves)
- (Δ) Συναρτήσεις Αξιολόγησης (value functions)

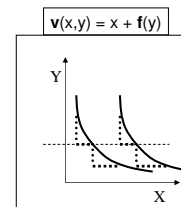
- $a \sim b \iff v(a) = v(b)$
- $a \succ b \iff v(a) > v(b)$



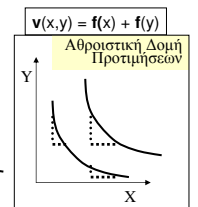
2D:



Πχ:  $v(x,y) = x + 2y$



$v(x,y) = x + \ln(y)$



$v(x,y) = \log(x) + y^2$

Ind. C.:

$y = (c-x)/2$

$y = e^{(c-x)}$

$y = \sqrt{c-\log(x)}$

## Εύρεση Συνάρτησης Αξιολόγησης

MC

### 2 Διαστάσεις και Προσθετική Δομή

$$v(x,y) = \lambda_1 * v_1(x) + \lambda_2 * v_2(y)$$

- α) Εύρεση συνιστωσών  $v_i()$   
– assessment procedures: midvalue splitting technique, lockstep procedure  
β) Εύρεση  $\lambda_i$

### 3 Διαστάσεις (X,Y,Z)

#### Ανεξαρτησία Προτιμήσεων (Preferential Independence)

Οι προτιμήσεις στο X,Y ανεξάρτητες του Z:

$$(x_1, y_1, z') \geq (x_2, y_2, z') \Leftrightarrow (x_1, y_1, z) \geq (x_2, y_2, z) \quad \forall z$$

#### Αμοιβαία Ανεξ. Προτιμήσεων (Mutual Preferential Independence)

Οποιοδήποτε ζευγάρι\* είναι ΑΠ των υπολοίπων  $\Leftrightarrow$

$$v(x) = \sum \lambda_i v(x_i)$$

### > 3 Διαστάσεις

Αμοιβαία Ανεξ. Προτιμήσεων ~ (3Δ, \* = υποσύνολο)

October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

13

## Αποφάσεις Πολλαπλών Κριτηρίων υπό συνθήκες Αβεβαιότητας

MU

Multi-attribute Utility Theory

(A) Άμεσος καθορισμός  $u(x)$

(B) Δόμηση

⊗ Ανεξαρτησία Προτιμήσεων (Preferential Independence)

⊗ Ανεξαρτησία Χρησιμότητας (Utility independence)

Προτιμήσεις στο (X~,Y) ανεξάρτητες του Z

⊗ Αθροιστική Ανεξαρτησία (Additive Independence)

$$U(x) = \sum \lambda_i u_i(x_i)$$

October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

14

## Παραλλαγές Προβλημάτων

- Αποφάσεις Κοινής Ωφελείας (Social welfare decisions)
- Ανάλυση Κόστους-Αποτελεσματικότητας (Cost-effectiveness analysis)
  - (c, b1,...bk)
- Ανάλυση Κόστους-Οφέλειας (Cost-benefit analysis)
  - (c, b1,...bk) => (c,b0) ==> (b0/c)
- Χρονική ανάλυση (Present-future analysis)
  - προβολή στο παρόν του κόστους
- Αποφάσεις Ομάδας (Group decisions)
  - u (u1(x), ...,un(x))

October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

15

## Βιβλιογραφία

- Ralph L. Keeney and Howard Raiffa, **Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs**, John Wiley & Sons, 1976

October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

16