

---

# Σύντομη Εισαγωγή στην Θεωρία Ανάλυσης Αποφάσεων

Γιάννης Τζιτζίκας  
*Οκτώβρης 2005*

Πανεπιστήμιο Κρήτης

---

## Διάρθρωση Παρουσίασης

---

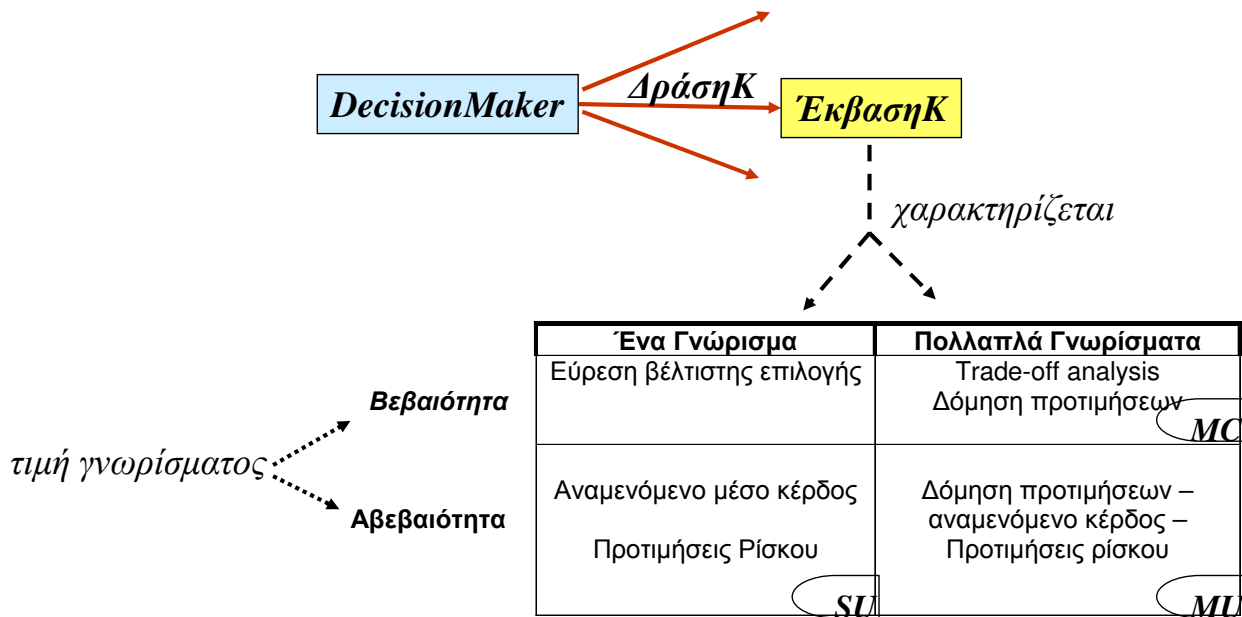
### Θεωρία Αποφάσεων - Θεωρία Χρησιμότητας

- Απλές Αποφάσεις με Αβεβαιότητα
- Δέντρα αποφάσεων (decision trees)
- Αποφάσεις και Πειραματισμός
- Συναρτήσεις χρησιμότητας (και ρίσκο) (utility functions)
- Αποφάσεις βάσει Πολλαπλών κριτηρίων και Βεβαιότητα (tradeoffs)
- Αποφάσεις βάσει Πολλαπλών κριτηρίων και Αβεβαιότητα

# Θεωρία Αποφάσεων (Decision Analysis)

Ορθολογική μεθοδολογία για λήψη αποφάσεων βάσει ενός ή περισσότερων κριτηρίων, υπο συνθήκες βεβαιότητας ή αβεβαιότητας

Science of Management, Operations Research



October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

3

**SU**

## Απλές Αποφάσεις υπο συνθήκες Αβεβαιότητας

Το πρόβλημα:  $(A, \Theta, P(\theta), g(a, \theta))$

**A:** σύνολο δυνατών Δράσεων

**$\Theta$ :** σύνολο Καταστάσεων Φύσης”

**$P(\theta)$ :** κατανομή πιθανότητας (από διαίσθηση/εμπειρία)

**$g(a, \theta)$  :** αναμενόμενο κέρδος από δράση a όταν η  $\theta$  ισχύει

Πχ: Εκμετάλευση γής (πετρέλαιο)

**$\Theta$ : Κατάσταση φύσης**

Βαρέλια:    20.000    10.000    0

$P(\theta_1) = 0.2$      $P(\theta_2) = 0.5$      $P(\theta_3) = 0.3$

		$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
<b>A</b>	<b>A1 (Γεώτρηση)</b>	20	10	-2
	<b>A2 (Εκμίσθωση)</b>	4	4	4
	<b>A3 (Εκμίσθ με %)</b>	8	5	0

**Αναμενόμενο κέρδος δράσης (using Bayes rule):**

$$g(a) = E[g(a, \theta)] = \sum g(a, \kappa) P(\theta = \kappa)$$

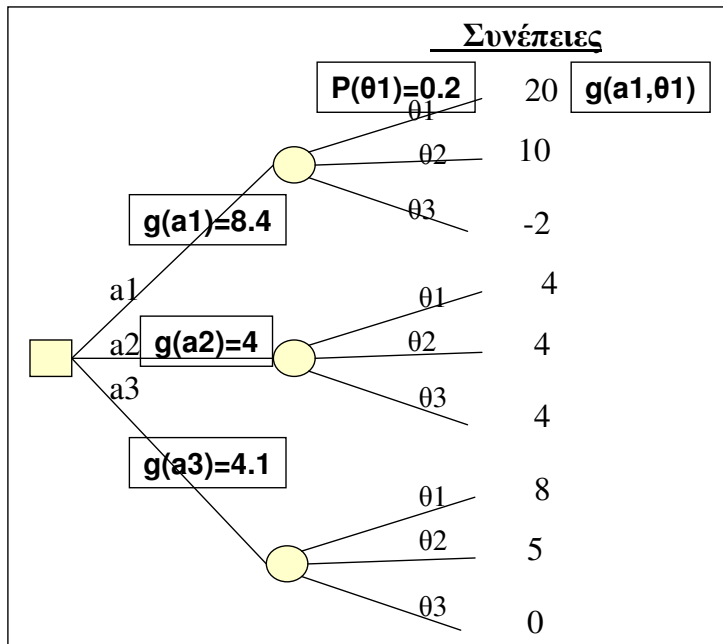
October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

4

## Δέντρα αποφάσεων

- Κόμβος απόφασης (Decision node)
- Κόμβος τύχης (Chance node)



Averaging out & folding back (backwards induction)

October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

5

## Αποφάσεις και Πειραματισμός

Πείραμα X

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
Αποτέλεσμα πειράματος $x_1$	$P(X_1 \theta_1)$	$P(X_1 \theta_2)$	$P(X_1 \theta_3)$
$x_2$	$P(X_2 \theta_1)$	$P(X_2 \theta_2)$	$P(X_2 \theta_3)$

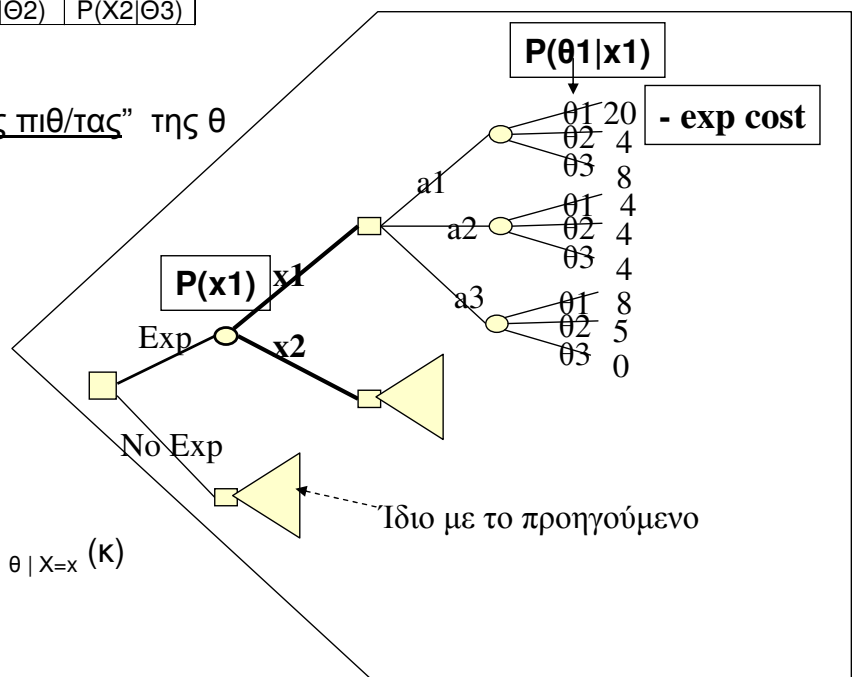
Πείραμα => "posterior κατ/μής πιθ/τας" της  $\theta$

$$P(\theta_j|X) = \frac{P(X|\theta_j) * P(\theta_j)}{\sum_i P(X|\theta_i) * P(\theta_i)}$$

Αναμενόμενο κέρδος δράσης:

$$g(a) = E[g(a, \theta)] = \sum g'(a, \kappa) h_{\theta|X=x}(\kappa)$$

όπου  $g' = g - \text{cost}(\text{exp})$



October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

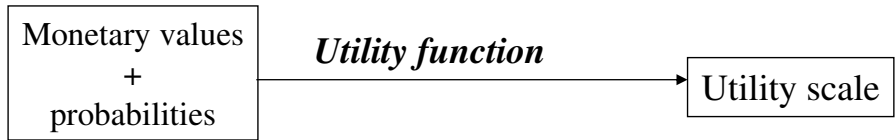
6

# Συναρτήσεις Χρησιμότητας (Utility Functions)

- ( 0(0.5), 100(0.5) ) ? 50
- ( 0(0.5), 100(0.5) ) ? (-50(0.5), 150(0.5))
- ( 0(0.5), 1.000.000(0.5) ) ? 500.000
- ( 0(0.5), 1.000.000.000(0.5) ) ? 200.000.000

ανάγκη

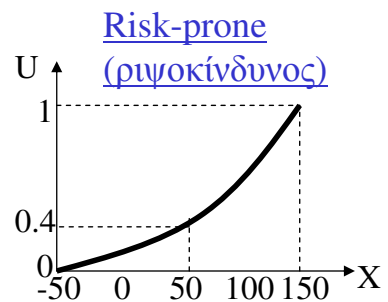
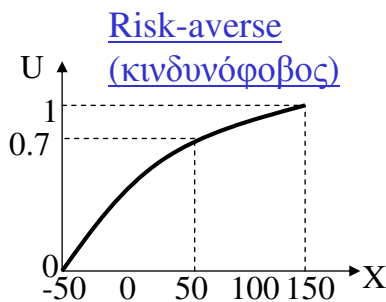
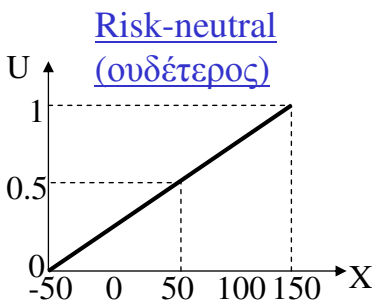
Μοντελοποίηση (ποιοτική και ποσοτική) «στάσης» απέναντι στον κίνδυνο



# Συναρτήσεις Χρησιμότητας (von Neumann & Morgenstern, 1940s)

- (1)  $x_1 < \dots < x_n$  (όλα τα  $g(a_i, \theta_j)$ )
- (2)  $x_i \sim \langle x_n, \pi_i, x_1 \rangle$  πχ  $50 \sim \langle 150, 0.7, -50 \rangle$
- (3)  $u(x_i) = \pi_i$   $u(x_1) = 0, \quad u(x_n) = 1$
- (4)  $u(a_j) = \sum \pi_i p_i^{a_j}$  (αντί  $u(a_j) = \sum x_i p_i^{a_j}$ ) αναμενόμενη χρησιμότητα

( 0(0.5), 100(0.5) ) ? (-50(0.5), 150(0.5))



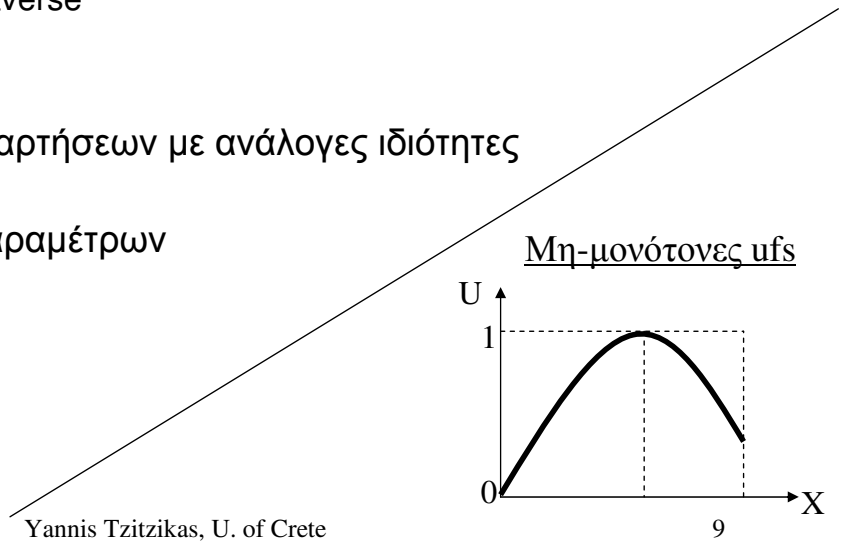
Πχ:  $x$

$\sqrt{x}$

$x^2$

## Μέθοδος Εύρεσης μιας Συναρτήσεως Χρησιμότητας

- 1) Προσδιορισμός μερικών πι
- 2) Συμπέρασμα ιδιοτήτων της  $u(x)$ 
  - Risk Neutral
  - Risk Averse
    - constantly risk averse
    - degreasingly risk averse
  - Risk Prone
- 3) Εύρεση οικογένειας συναρτήσεων με ανάλογες ιδιότητες
- 4) Επιλογή κατάλληλων παραμέτρων



October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

## Παραδείγματα Συναρτήσεων Χρησιμότητας

Risk aversion at  $x$ :  $r(x) = -u''(x)/u'(x)$

$u_1 \sim u_2 \iff r_1(x) = r_2(x)$  για κάθε  $x$

Τύποι		Παραδείγματα
Constant R-A:	$r(x) = c > 0$ for all $x$	$u(x) = -e^{-2x}$
Decreasing R-A:		$u(x) = (x+k)^c, 0 < c < 1$ $u(x) = \log(x+b)$
Constant R-P:	$r(x) = c < 0$ for all $x$	$u(x) = e^{-2x}$
Decreasing R-P:		$u(x) = x^2$

October 2005

Yannis Tzitzikas, U. of Crete

10

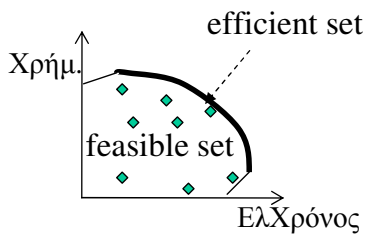


πλήρες, λειτουργικό, διαίρετο, λιτό

α1) Δόμηση στόχων  
α2) Επιλογή συνόλου γνωρισμάτων

β) Δόμηση προτιμήσεων

Άνευ Δόμησης Προτιμήσεων



Δόμηση Προτιμήσεων

(Α) Λεξικογραφική

- <Χρήμα, ΕλεύθεροςΧρόνος,...>

(Β) Λεξικογραφική με κατώφλι

- < Χρήμα(≥500), ΕλεύθΧρόνος(≥10) >

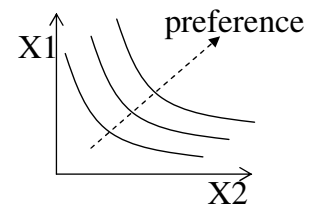
- (300, 11)
- (350, 5)
- (900, 2)
- (500, 3)

Δόμηση Προτιμήσεων (συν)

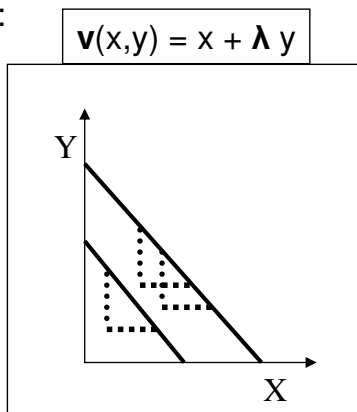
(Γ) Καμπύλες ισοπροτίμησης (indifference curves)

(Δ) Συναρτήσεις Αξιολόγησης (value functions)

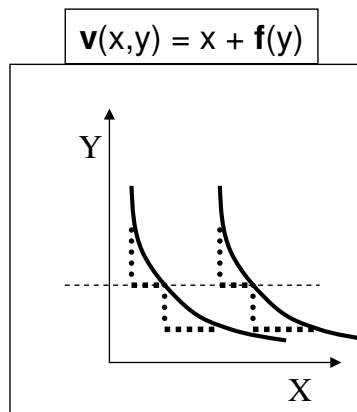
- $a \sim b \iff v(a) = v(b)$
- $a \succ b \iff v(a) > v(b)$



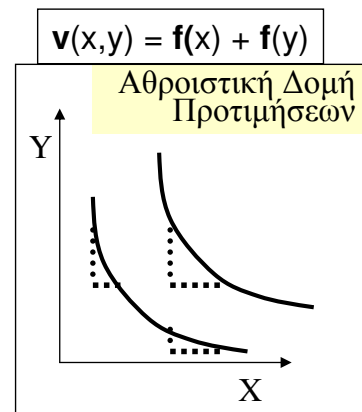
2D:



Πχ:  $v(x,y) = x + 2y$



$v(x,y) = x + \ln(y)$



$v(x,y) = \log(x) + y^2$

Ind. C.:  $y = (c-x)/2$

$y = e^{(c-x)}$

$y = \sqrt{c - \log(x)}$

**2** Διαστάσεις και Προσθετική Δομή  $v(x,y) = \lambda_1 * v_1(x) + \lambda_2 * v_2(y)$

- α) Εύρεση συνιστωσών  $v_i()$ 
  - assesment procedures: midvalue splitting technique, lockstep procedure
- β) Εύρεση  $\lambda_i$

**3** Διαστάσεις (X,Y,Z)

**Ανεξαρτησία Προτιμήσεων** (Preferential Independence)

Οι προτιμήσεις στο X,Y ανεξάρτητες του Z:

$$(x_1, y_1, z') \geq (x_2, y_2, z') \iff (x_1, y_1, z) \geq (x_2, y_2, z) \quad \forall z$$

**Αμοιβαία Ανεξ. Προτιμήσεων** (Mutual Preferential Independence)

Οποιοδήποτε ζευγάρι\* είναι ΑΠ των υπολοίπων  $\iff$

$$v(\mathbf{x}) = \sum \lambda_i v(x_i)$$

**> 3** Διαστάσεις

Αμοιβαία Ανεξ. Προτιμήσεων  $\sim (3\Delta, * = \text{υποσύνολο})$

- (A) Άμεσος καθορισμός  $u(\mathbf{x})$
- (B) Δόμηση

☺ Ανεξαρτησία Προτιμήσεων (Preferential Independence)

☺ Ανεξαρτησία Χρησιμότητας (Utility independence)

Προτιμήσεις στο  $(X \sim, Y)$  ανεξάρτητες του Z

☺ Αθροιστική Ανεξαρτησία (Additive Independence)

$$U(\mathbf{x}) = \sum k_i u_i(x_i)$$

- Αποφάσεις Κοινής Ωφελείας (**Social welfare decisions**)
- Ανάλυση Κόστους-Αποτελεσματικότητας (**Cost-effectiveness analysis**)
  - $(c, b_1, \dots, b_k)$
- Ανάλυση Κόστους-Οφέλειας (**Cost-benefit analysis**)
  - $(c, b_1, \dots, b_k) \Rightarrow (c, b_0) \implies (b_0/c)$
- Χρονική ανάλυση (**Present-future analysis**)
  - προβολή στο παρόν του κόστους
- Αποφάσεις Ομάδας (**Group decisions**)
  - $u (u_1(x), \dots, u_n(x))$

## Βιβλιογραφία

---

- Ralph L. Keeney and Howard Raiffa, ***Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs***, John Wiley & Sons, 1976