

HY-280 Θεωρία Υπολογισμού

Φροντιστήριο 10

05/12/2025

Άσκηση 1. Στην Διάλεξη 18 χρησιμοποιήσαμε την μεταβλητή $table(i, j)$ για να αποδείξουμε ότι $CFL \in P$, όπου για μια μη-τερματική μεταβλητή A ισχύει

$$A \in table(i, j) \iff \left(A \xRightarrow{*} w_i w_{i+1} \dots w_j \right).$$

Δίνεται η CNF G

$$S \rightarrow AA \mid \varepsilon, \quad A \rightarrow BB \mid AB \mid a, \quad B \rightarrow BA \mid b.$$

Υπολογίστε τις $table(i, j)$ για κάθε $1 \leq i \leq j \leq 4$ έτσι ώστε να δείξετε ότι $abba \in L(G)$.

Λύση. Από το βήμα 3. του αλγορίθμου (δείτε Διάλεξη 18) έχουμε ότι

$$\text{Αν } A \rightarrow w_i \in G, \text{ προσθέτει } A \in table(i, i).$$

Άρα στο 1ο βήμα εκτέλεσης του αλγορίθμου έχουμε για την $table$ τα εξής:

	1	2	3	4
1	A			
2		B		
3			B	
4				A

Στην συνέχεια, από την επανάληψη

Για $\ell = 1, \dots, n$:

$\forall i, k$ τ.ω. $1 \leq i < k < i + \ell - 1 \leq n$: $[j = i + \ell - 1]$

$\forall A \rightarrow BC \in G$:

Αν $B \in table(i, k)$ και $C \in table(k + 1, j)$ τότε πρόσθεσε $A \in table(i, j)$.

στο 2ο βήμα ($\ell = 2$) έχουμε,

	1	2	3	4
1	A	A		
2		B	A	
3			B	B
4				A

στο 3ο βήμα ($\ell = 3$) έχουμε,

	1	2	3	4
1	A	A	S, A	
2		B	A	A, S
3			B	B
4				A

στο 4ο βήμα ($\ell = 4$) έχουμε,

	1	2	3	4
1	A	A	S, A	S, A
2		B	A	A, S
3			B	B
4				A

Η επανάληψη ολοκληρώθηκε και ελέγχουμε

Αν $S \in \text{table}(1, n)$, αποδέχεται. Αλλιώς, απορρίπτει.

Η μεταβλητή S εμφανίζεται στη $\text{table}(1, n)$, άρα $abba \in L(G)$. $\square$

Άσκηση 2 (Άσκηση 7.20 από το βιβλίο του M. Sipser). Έστω το μη-κατευθυνόμενο γράφημα G . Θεωρήστε την γλώσσα

$$\text{ΒΡΑΧΕΙΑ ΔΙΑΔΡΟΜΗ} = \left\{ \langle G, a, b, k \rangle \mid \begin{array}{l} \text{το } G \text{ περιέχει απλή διαδρομή μήκους} \\ \text{το πολύ } k \text{ από το } a \text{ στο } b \end{array} \right\}$$

Να δείξετε ότι το πρόβλημα $\text{ΒΡΑΧΕΙΑ ΔΙΑΔΡΟΜΗ} \in \mathbf{P}$.

Λύση. Έστω n το πλήθος των κορυφών του G . Αρκεί να κατασκευάσουμε μια

ντετερμινιστική TM 1-ταινίας ως εξής:

$M =$ “ Στην είσοδο $\langle G, a, b, k \rangle$:

1. Σημειώνουμε την κορυφή a με 0:
2. Για $i = 0, \dots, n$:
3. Αν η ακμή (v, u) συνδέει την v η οποία είναι σημειωμένη με i , τότε σημειώνει την u με $i + 1$.
4. Αν η ακμή b σημειωθεί με το πολύ k , αποδέξου.
5. Αλλιώς απέρριψε.”

Παρατηρούμε ότι η M τρέχει στο πλήθος των κορυφών και των ακμών. Συνεπώς, χρειάζεται $O(|V| + |E|)$ υπολογιστικό χρόνο. Άρα, $\text{BΡΑΧΕΙΑ ΔΙΑΔΡΟΜΗ} \in \mathbf{P}$. $\square$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι η γλώσσα $ALL_{\text{DFA}} \in \mathbf{P}$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η ALL_{DFA} είναι διαγνώσιμη από TM. Επίσης, γνωρίζουμε ότι η γλώσσα $E_{\text{DFA}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ DFA και } L(M) = \emptyset\}$ είναι διαγνώσιμη από TM. Επομένως, θεωρούμε ως R τον διαγνώστη της ALL_{DFA} και ως T τον διαγνώστη της E_{DFA} . Ο διαγνώστης R είναι ο εξής:

$R =$ “ Στην είσοδο M :

1. Κατασκευάζει DFA B το οποίο να αναγνωρίζει την $\overline{L(M)}$, αντιστρέφοντας τις τερματικές και τις μη-τερματικές κορυφές.
2. Τρέχει T για είσοδο $\langle B \rangle$ και διαγιγνώσκει.
3. Αν T αποδέχεται, αποδέχεται.
4. Αν T απορρίπτει, απορρίπτει.”

Η R διαγιγνώσκει την ALL_{DFA} καθώς το βήμα 2. εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο. $\square$

Άσκηση 4 (Άσκηση 7.13 από το βιβλίο του M. Sipser). Μετάθεση επί ενός συνόλου $[k] := \{1, \dots, k\}$ είναι οποιαδήποτε αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση επί του συνόλου αυτού. Εάν p είναι μια μετάθεση, τότε η έκφραση p^t αναπαριστά τη σύνθεση της με τον εαυτό της t φορές. Δείξτε ότι η γλώσσα

$$\text{ΟΜΟΙΟΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ} = \left\{ \langle p, q, t \rangle \mid \begin{array}{l} \text{οι } p, q \text{ είναι μεταθέσεις του } [k], \\ \text{ο } t \text{ είναι δυαδικός ακέραιος,} \\ \text{και } p = q^t. \end{array} \right\}$$

Να δείξετε ότι το πρόβλημα $\text{ΟΜΟΙΟΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ} \in \mathbf{P}$.

Λύση. Αρχικά ας αναλύσουμε τα στοιχεία της γλώσσας. Ο t είναι δυαδικός ακέραιος, επομένως θα έχει την μορφή $t = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_n 2^n$, όπου κάθε συντελεστής a_i έχει τιμή είτε 0 είτε 1. Επομένως, έχουμε $q^t = q^{a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_n 2^n}$.

Παρατηρούμε ότι η σύνθεση¹ δύο μεταθέσεων μπορεί να εκτελεστεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Έστω δύο μεταθέσεις r, z και $[k]$ το σύνολο που μεταθέτουμε. Οι μεταθέσεις είναι αμφιμονοσήμαντες, επομένως η σύνθεση $r \circ z[k]$ είναι ένας σειριακός υπολογισμός $r(z([k]))$. Επομένως, για να βρούμε το αποτέλεσμα της σύνθεσης $r \circ z[k]$, αρκεί να βρούμε τις απεικονίσεις των στοιχείων του $[k]$ μέσω της z και έπειτα τις μεταθέσεις του συνόλου $z([k])$ μέσω της r . Αυτό απαιτεί έναν βρόγχο ο οποίος θα τρέχει για όλα τα στοιχεία του $[k]$. Συνεπώς, η σύνθεση δύο μεταθέσεων απαιτεί πολυωνυμικό χρόνο. Αν τώρα πρέπει να εκτελέσουμε t συνθέσεις θα χρειαστεί να εκτελέσουμε τον προηγούμενο αλγόριθμο σε εκθετικό χρόνο, ως προς το μήκος του t όταν αυτό αναπαρίσταται ως δυαδικός. Άρα αυτή η προσέγγιση αποτυγχάνει.

Από την άλλη, παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε το q^{2^i} υπολογίζουμε το q υψωμένο σε μία δύναμη του 2. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω επαναλαμβανόμενων συνθέσεων της ίδιας μετάθεσης.

Για $i = 1$, τότε $q^{2^1} = q^2 = q \circ q$.

Για $i > 1$, τότε η υπολογίζουμε το q^{2^i} , χρησιμοποιώντας την σύνθεση του $q^{2^{(i-1)}}$ με τον εαυτό του. Για παράδειγμα, $q^4 = q^2 \circ q^2$, $q^8 = q^4 \circ q^4$, κτλ.

Χρησιμοποιούμε αυτή την τεχνική: υπολογίζουμε $q^1, q^2, \dots, q^n$, όπου n είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 η οποία είναι μικρότερη του t . Κάθε όρος είναι το τετράγωνο του προηγούμενου. Για να βρούμε το q^t αρκεί να συνθέσουμε τις προηγούμενες μεταθέσεις (τις οποίες έχουμε υπολογίσει ήδη) οι οποίες αντιστοιχούν στους 1 της δυαδικής αναπαράστασης του t . Ο συνολικός αριθμός συνθέσεων είναι το πολύ όσο μήκος του t . Ο αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός και τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι ΟΜΟΙΟΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ $\in \mathbf{P}$. $\square$

Άσκηση 5 (Άσκηση 7.14 από το βιβλίο του M. Sipser). *Η κλάση $\mathbf{P}$ είναι κλειστή ως προς την πράξη της παράδεσης.*

Λύση. Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $L_1, L_2 \in \mathbf{P}$ τότε $L_1 L_2 \in \mathbf{P}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $L_1 \in \mathbf{P}$ και ότι $L_2 \in \mathbf{P}$. Κατά τον ορισμό, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν διαγνώστες M_1 και M_2 τ.ω. ο M_1 να είναι διαγνώστης για την L_1 με πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^k)$ και ο M_2 να είναι διαγνώστης για την L_2 με πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^\ell)$ για $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Η γλώσσα $L_1 L_2$ ορίζεται ως

$$L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

¹Σύνθεση συναρτήσεων.

Ο διαγνώστης για την L_1L_2 πρέπει, δεδομένης μιας εισόδου w , να προσπαθήσει να βρει μια διαμέριση του w σε w_1w_2 τ.ω. $w_1 \in L_1$ και $w_2 \in L_2$. Ονομάζουμε αυτόν τον διαγνώστη T και λειτουργεί ως εξής:

$T =$ “ Στην είσοδο $w = w_1 \dots w_n$:

1. Για $i = 0, \dots, n$:
2. Θέσε $w_1 = w_1 \dots w_i$ και $w_2 = w_{i+1} \dots w_n$.
3. Εκτέλεσε τον M_1 στην είσοδο w_1 .
4. Εκτέλεσε τον M_2 στην είσοδο w_2 .
5. Αν καμία επιλογή των w_1 και w_2 δεν οδήγησε σε αποδοχή, τότε απέρριψε.”

Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι ο διαγνώστης έχει πολυωνυμική χρονική πολυπλοκότητα. Διατρέχουμε το βήμα 2. το πολύ $(n+1)$ φορές. Αν τρέξουμε τον M_1 σε ένα υποσύνολο του w , αυτό θα πάρει το πολύ $O(n^k)$ βήματα. Ομοίως, τρέχοντας τον M_2 σε ένα υποσύνολο του w θα πάρει το πολύ $O(n^\ell)$ βήματα. Συνεπώς, μια μόνο επανάληψη του 2. χρησιμοποιεί το πολύ $O(n^k) + O(n^\ell) = O(n^z)$ βήματα, όπου $z = \max\{k, \ell\}$. Ολόκληρος ο διαγνώστης χρησιμοποιεί έτσι $(n+1) \cdot O(n^z) = O(n^{z+1})$ βήματα. Επομένως, $L(M) = L_1L_2 \in \mathbf{P}$. $\square$

Άσκηση 6. Η κλίση P είναι κλειστή ως προς την πράξη της Kleene star.

Λύση. Ας θεωρήσουμε ότι $A \in \mathbf{P}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $A^* \in \mathbf{P}$. Εφόσον $A \in \mathbf{P}$, υπάρχει μια ντετερμινιστική μηχανή Turing M_A με χρονική πολυπλοκότητα $O(n^k)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

Τώρα κατασκευάζουμε, χρησιμοποιώντας την M_A , έναν διαγνώστη για το A^* και δείχνουμε ότι η χρονική του πολυπλοκότητα φράσσεται από ένα πολυώνυμο. Η κατασκευή μας θα πρέπει να είναι τ.ω. $w \in A^*$ αν και μόνο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- $w = \varepsilon$, ή
- $w \in A$, ή
- $\exists u, v : w = uv$ και $u \in A^*$ και $v \in A^*$.

Στον διαγνώστη M , αφήνουμε το $w_{i,j}$ να δηλώνει την υποσυμβολοσειρά του $w = w_1w_2 \dots w_n$ που ξεκινά με το w_i και τελειώνει με το w_j . Ο διαγνώστης κατασκευάζει έναν πίνακα όπου $table(i, j) = \text{Αληθές}$ αν $w_{i,j} \in A^*$. Το κάνουμε αυτό εξετάζοντας

όλες τις υποσυμβολοσειρές του w ξεκινώντας από υποσυμβολοσειρές μήκους 1 και καταλήγοντας στην υποσυμβολοσειρά μήκους n . Πιο συγκεκριμένα :

$M =$ “ Στην είσοδο $w = w_1w_2 \dots w_n$:

1. Αν $w = \varepsilon$ τότε αποδέξου, αλλιώς
2. Για $\ell = 1, \dots, n$:
3. Για $i = 1, \dots, n - (\ell - 1)$:
4. $j = i + \ell - 1$
5. Εκτέλεσε M_A για $w_{i,j}$
6. Αν M_A αποδέχεται $w_{i,j}$, τότε $table(i, j) = \text{Αληθές}$
7. Αλλιώς
8. Για $k = i, \dots, j - 1$:
9. Αν $table(i, k) = \text{Αληθές}$ και $table(k + 1, j) = \text{Αληθές}$
10. τότε $table(i, j) = \text{Αληθές}$
11. Αν $table(1, n) = \text{Αληθές}$ αποδέξου, αλλιώς απέρριψε.”

Τώρα αναλύουμε την πολυπλοκότητα του διαγράμμου M . Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τρεις εμφωλευμένους βρόχους, καθένας από τους οποίους προσπελαύνεται το πολύ $O(n)$ φορές. Στον δεύτερο βρόχο εκτελούμε την M_A σε μια είσοδο μήκους το πολύ n , οπότε ο συνολικός χρόνος είναι το πολύ $O(n) \cdot O(n) \cdot (O(n^k) + O(n)) = O(n^{2+\max(k,1)})$ βήματα, που είναι πολυωνυμικός ως προς το n . $\square$

Άσκηση 7. Η κλάση $\mathbf{NP}$ είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.

Λύση. Έστω δύο γλώσσες A και B . Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $A, B \in \mathbf{NP}$ τότε $A \cup B \in \mathbf{NP}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A \in \mathbf{NP}$ και ότι $B \in \mathbf{NP}$, και $\mathbf{NTM} M_A, M_B$ η οποίες τις διαγιγνώσκουν σε πολυωνυμικό χρόνο. Θα κατασκευάσουμε μια $\mathbf{NTM} N$ η οποία να διαγιγνώσκει την γλώσσα $A \cup B$.

$N =$ “ Στην είσοδο w :

1. Μη-ντετερμινιστικά επιλέγει αν θα ελέγξει κατά πόσο $w \in A$ ή $w \in B$.
2. Αν επιλέξει A , εκτελεί την M_A για w , και επιστρέφει το αποτέλεσμα.
3. Αν επιλέξει B , εκτελεί την M_B για w , και επιστρέφει το αποτέλεσμα.”

Η $\mathbf{NTM} N$ θα εκτελεστεί σε $O(1) + \max\{O(M_A), O(M_B)\} = \max\{O(M_A), O(M_B)\}$, η οποία πρέπει να γίνεται με βάση τον μη-ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, αφού η M_A και η M_B εκτελούνται σε μη-ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο. Επειδή η $\mathbf{NTM} N$ διαγιγνώσκει για την ένωση σε μη-ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, η ένωση $A \cup B$ είναι στην $\mathbf{NP}$. $\square$

Άσκηση 8 (Άσκηση 7.15 από το βιβλίο του M. Sipser). *Η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη της παράθεσης.*

Λύση. Έστω δύο γλώσσες A και B . Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $A, B \in \mathbf{NP}$ τότε $A \cup B \in \mathbf{NP}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A \in \mathbf{NP}$ και ότι $B \in \mathbf{NP}$, και NTM M_A, M_B η οποίες τις διαγιγνώσκουν σε πολυωνυμικό χρόνο. Θα κατασκευάσουμε μια NTM N η οποία να διαγιγνώσκει την γλώσσα AB .

$N =$ “ Στην είσοδο w :

1. Μη-ντετερμινιστικά χωρίζει την w σε x, y .
2. Εκτελεί την M_A για x .
3. Εκτελεί την M_B για y .
4. Αν και οι δύο αποδέχονται, τότε αποδέχεται. Αλλιώς, απορρίπτει”

Η NTM N θα εκτελεστεί σε $O(1) + O(M_A) + O(M_B) = \max\{O(M_A), O(M_B)\}$, η οποία πρέπει να γίνεται με βάση τον μη-ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, αφού η M_A και η M_B εκτελούνται σε μη-ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο. Επειδή η NTM N διαγιγνώσκει για την παράθεση σε μη-ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, η παράθεση AB είναι στην $\mathbf{NP}$. $\square$