

HY-280 Θεωρία Υπολογισμού

Φροντιστήριο 8

21/11/2025

Άσκηση 1. Δίνεται η γλώσσα

$$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \emptyset\}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει απεικονιστική αναγωγή από το πρόβλημα απόφασης των TM στο συμπλήρωμα του προβλήματος κενότητας των TM, δηλαδή $A_{TM} \leq_m \overline{E}_{TM}$.

Λύση. Θα κατασκευάσουμε μια υπολογίσιμη συνάρτηση f η οποία παίρνει ως όρισμα την περιγραφή $\langle M, w \rangle$ και επιστρέφει ως αποτέλεσμα την περιγραφή $\langle M' \rangle$. Καθώς κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από τη A_{TM} στην $\overline{E}_{TM}$ θα πρέπει

$$“M \text{ αποδέχεται } w \iff L(M') \neq \emptyset”$$

Αναγωγή f :

Είσοδος: $\langle M, w \rangle$

Περιγραφή: Κατασκευάζουμε μια TM M' η οποία με είσοδο x εκτελεί τα εξής:

- Αν $x \neq w$, απορρίπτει.
- Αλλιώς, η M εκτελείται για w .

Αν η M αποδέχεται την w , τότε αποδέχεται.

Έξοδος: $\langle M' \rangle$

Ορθότητα. Αν η M αποδέχεται την w τότε και η M' αποδέχεται, δηλαδή $L(M') \neq \emptyset$. Άρα $\langle M, w \rangle \in A_{TM} \Rightarrow f(\langle M, w \rangle) = \langle M' \rangle \in \overline{E}_{TM}$. Αν $L(M') \neq \emptyset$, τότε η M' αποδέχεται τουλάχιστον μια συμβολοσειρά, έστω w , τότε και η M αποδέχεται την w . Άρα $\langle M' \rangle = f(\langle M, w \rangle) \in \overline{E}_{TM} \Rightarrow \langle M, w \rangle \in A_{TM}$.

Εφόσον η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη, τότε και η $\overline{E}_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη. $\square$

Άσκηση 2. Δίνεται η γλώσσα

$$REG_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) \text{ κανονική γλώσσα} \}.$$

Να δείξετε ότι $\overline{A}_{TM} \leq_m REG_{TM}$.

Λύση. Θα κατασκευάσουμε μια υπολογίσιμη συνάρτηση f η οποία παίρνει ως όρισμα την περιγραφή $\langle M, w \rangle$ και επιστρέφει ως αποτέλεσμα την περιγραφή $\langle M' \rangle$. Καθώς κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από τη $\overline{A}_{TM}$ στην REG_{TM} θα πρέπει

$$“M \text{ δεν αποδέχεται } w \iff L(M') \text{ κανονική}”$$

Αναγωγή f :

Είσοδος: $\langle M, w \rangle$

Περιγραφή: Κατασκευάζουμε μια TM M' η οποία με είσοδο x εκτελεί τα εξής (σημειώνεται ότι η M' έχει κωδικοποιημένη την περιγραφή της M και του w στη δική της περιγραφή):

- Προσομοιώνει την M για w .
- Αν η M αποδέχεται την w , τότε ελέγχει αν x είναι της μορφής $0^n 1^n$.
Αν ναι, αποδέχεται, αλλιώς απορρίπτει.

Έξοδος: $\langle M' \rangle$

Ορθότητα.

$$\begin{aligned} M \text{ δεν αποδέχεται } w &\Rightarrow M' \text{ δεν αποδέχεται καμία είσοδο.} \\ &\Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \text{ κανονική.} \end{aligned}$$

Επίσης,

$$M \text{ αποδέχεται } w \Rightarrow L(M') = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \Rightarrow L(M') \text{ μη κανονική.}$$

Άρα,

$$“M \text{ δεν αποδέχεται } w \iff L(M') \text{ κανονική}” \Rightarrow \overline{A}_{TM} \leq_m REG_{TM}.$$

Επομένως, η REG_{TM} δεν είναι αναγνωρίσιμη. $\square$

Άσκηση 3. Δίνεται η γλώσσα

$$CON_{TM} = \{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid M_1, M_2, M_3 \text{ TM και } L(M_1) = L(M_2) \circ L(M_3) \}.$$

Να δείξετε ότι $EQ_{TM} \leq_m CON_{TM}$.

Λύση. Θα κατασκευάσουμε μια υπολογίσιμη συνάρτηση f η οποία θα παίρνει ως όρισμα την περιγραφή $\langle N_1, N_2 \rangle$ και επιστρέφει ως αποτέλεσμα την περιγραφή $\langle M_1, M_2, M_3 \rangle$. Καθώς κάνουμε απεικονιστική αναγωγή από τη EQ_{TM} στην CON_{TM} θα πρέπει

$$L(N_1) = L(N_2) \iff L(M_1) = L(M_2) \circ L(M_3)$$

Αναγωγή f :

Είσοδος: $\langle N_1, N_2 \rangle$

Περιγραφή:

- Θέτουμε $M_1 = N_1$ και $M_2 = N_2$.
- Κατασκευάζουμε μια TM M_3 η οποία αποδέχεται μόνο την συμβολοσειρά ε και απορρίπτει όλες τις υπόλοιπες.

Έξοδος: $\langle M_1, M_2, M_3 \rangle$

Ορθότητα.

$$L(N_1) = L(N_2) \iff L(N_1) = L(N_2) \circ \{\varepsilon\} \iff L(M_1) = L(M_2) \circ L(M_3).$$

Επίσης,

$$L(N_1) = L(N_2) \iff L(M_1) = L(M_2) \circ L(M_3),$$

και EQ_{TM} στην CON_{TM} . Επομένως, η CON_{TM} δεν είναι T-αναγνωρίσιμη. $\square$

Άσκηση 4. Να δείξετε ότι, αν A αναγνωρίσιμη και $A \leq_m \bar{A}$, τότε A διαγνώσιμη.

Λύση. Εφόσον, $A \leq_m \bar{A}$, τότε $\bar{A} \leq_m \bar{\bar{A}} \Rightarrow \bar{A} \leq_m A$. Επίσης, η A είναι αναγνωρίσιμη και μέσω της απεικονιστικής αναγωγής και η $\bar{A}$ είναι αναγνωρίσιμη. Συνεπώς, η A είναι διαγνώσιμη. $\square$

Άσκηση 5. Δίνεται η γλώσσα

$$J = \{w \mid \text{είτε } w = 0x \text{ για κάποιο } x \in A_{TM}, \text{ είτε } w = 1y \text{ για κάποιο } y \in \bar{A}_{TM}\}.$$

Να δείξετε ότι, τόσο η γλώσσα J όσο και η γλώσσα $\bar{J}$ δεν είναι αναγνωρίσιμες.

Λύση. Θα δείξουμε ότι $\bar{A}_{TM} \leq_m J$ και $\bar{A}_{TM} \leq_m \bar{J}$. Θεωρήστε την ακόλουθη απεικονιστική αναγωγή f από τη γλώσσα $\bar{A}_{TM}$ στη γλώσσα J , όπου $f(w) = 1w$. Παρατηρούμε ότι $w \in \bar{A}_{TM} \iff 1w \in J$, και συνεπώς $\bar{A}_{TM} \leq_m J$.

Για να αναγάγουμε τη γλώσσα $\overline{A}_{TM}$ στη γλώσσα $\overline{J}$, θεωρούμε την αναγωγή g με $g(w) = 0w$. Παρατηρούμε ότι $w \in \overline{A}_{TM} \iff w \notin A_{TM} \iff 0w \notin J \iff 0w \in \overline{J}$.

Οι f, g είναι υπολογίσιμες συναρτήσεις, συνεπώς τόσο η γλώσσα J όσο και η γλώσσα $\overline{J}$ δεν είναι αναγνωρίσιμες.

□

Άσκηση 6. Ορίζουμε ως 2-DFA έναν ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτοματισμό που διαθέτει δύο αναγνώστες-κεφαλές, οι οποίες είναι αμφίδρομες και μπορούν να κινηθούν ανεξάρτητα προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Οι κεφαλές ξεκινούν από την αριστερή άκρη της ταινίας εισόδου και μπορούν να κινηθούν ανεξάρτητα. Η ταινία ενός 2-DFA είναι πεπερασμένη και είναι ακριβώς τόσο μεγάλη ώστε να χωρά την είσοδο συν δύο επιπλέον κεφιά κενού, ένα στην αριστερή άκρη και ένα στη δεξιά, τα οποία λειτουργούν ως οριοθέτες. Το αυτόματο αποδέχεται την είσοδο του αν καταλήξει σε μια ειδική κατάσταση αποδοχής.¹

Έστω η γλώσσα

$$A_{2-DFA} = \{ \langle M, x \rangle \mid M \text{ είναι ένα 2-DFA και } M \text{ αποδέχεται την είσοδο } x \}.$$

Δείξτε ότι η A_{2-DFA} είναι διαγνώσιμη.

Λύση. Εκ' κατασκευής υπάρχει πεπερασμένο πλήθος υπολογισμών στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα 2-DFA. Έστω ότι το 2-DFA έχει $|K|$ καταστάσεις και είσοδο μεγέθους n . Κάθε κεφαλή μπορεί να βρεθεί το πολύ σε n διαφορετικές θέσεις και το συνολικό πλήθος των υπολογισμών είναι $|K|(n+2)^2$. Άρα, η TM L που διαγιγνώσκει την A_{2-DFA} είναι,

$L =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M 2-DFA και w συμβολοσειρά:

1. Προσομοίωση M και w για το πολύ $|K|(n+2)^2$ επαναλήψεις (ή) έως ότου τερματίσει.
 2. Αν M τερματίσει, αποδέχεται.
 3. Αν M εξαντλήσει τις επαναλήψεις χωρίς να τερματίσει, απορρίπτει.
- Αλλιώς, απέρριψε.”

□

Άσκηση 7. Έστω ότι το αλφάβητο της ταινίας όλων των TM σε αυτό το πρόβλημα είναι $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση του δραστήριου κάστορα (busy beaver) $BB : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ως εξής. Για κάθε τιμή του k , εξετάζουμε όλες τις TM με k καταστάσεις, οι

¹Ένα 2-DFA μπορεί να αναγνωρίσει τη γλώσσα $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

οποίες τερματίζουν όταν ξεκινήσουν με άδεια ταινία. Το $BB(k)$ είναι ο μέγιστος αριθμός άσσων που θα παραμείνουν στην ταινία μεταξύ όλων αυτών των μηχανών. Δείξτε ότι η BB δεν είναι υπολογίσιμη συνάρτηση.

Λύση. Υποθέτουμε ότι η BB είναι υπολογίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια TM F που υπολογίζει τη BB . Χωρίς απώλεια γενικότητας, θεωρούμε ότι F είναι μια TM που, σε είσοδο 1^n , τερματίζει με $1^{BB(n)}$ στην ταινία για κάθε n . Τώρα, κατασκευάζουμε μια TM M που τερματίζει όταν ξεκινά με άδεια ταινία, βασισμένη στο F :

- Στο Βήμα 1, η M γράφει n άσσους στην ταινία.
- Στο Βήμα 2, η M διπλασιάζει τους άσσους στην ταινία.
- Στο Βήμα 3, η M προσομοιώνει το F στην είσοδο 1^{2n} .

Επομένως, η M θα τερματίσει πάντα με $BB(2n)$ άσσους όταν ξεκινά με άδεια ταινία.

Για να υλοποιηθεί η M , χρειαζόμαστε το πολύ n καταστάσεις για να εκτελεστεί το Βήμα 1 και ένα σύνολο από c καταστάσεις για να εκτελεστούν τα Βήματα 2 και 3, για κάποια σταθερά c . Σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε ότι $BB(n+c) =$ ο μέγιστος αριθμός άσσων που μια TM με $n+c$ καταστάσεις θα τερματίσει, που είναι τουλάχιστον ο αριθμός άσσων με τον οποίο τερματίζει η M . Αυτό σημαίνει ότι $BB(n+c) \geq BB(2n)$ ισχύει για κάθε n .

Ωστόσο, η $BB(k)$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Συνεπώς, $BB(n+c) < BB(2n)$ όταν $n > c$, και έτσι καταλήγουμε σε αντίφαση. $\square$