

ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού

Φροντιστήριο 7

14/11/2025

Άσκηση 1. Κατασκευάσαμε την TM που αναγνωρίζει την γλώσσα $L = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$.

Λύση. Περιγραφή λειτουργίας M :

$M =$ "Για είσοδο w :

1. Εάν είσοδος κενή συμβολοσερά, αποδεχόμαστε. Αν όχι απορρίπτουμε.
2. Αλλιώς, διαβάζει το αριστερότερο σύμβολο. Εάν δεν είναι 0, απορρίπτουμε.
Εάν είναι 0, το μαρκάρει με **X**.
3. Μπαίνει στην κατάσταση q_1 , κινείται δεξιά έως ότου βρει το 1ο 1, το μαρκάρει με **Y**.
4. Μπαίνει στην κατάσταση q_2 , κινείται δεξιά έως ότου βρει το 1ο 0, το μαρκάρει με **Z**.
5. Μπαίνει στην κατάσταση q_3 , κινείται αριστερά έως το 1ο **X**.
κάνει μεταβολή στο **X** και εάν συναντήσει 0, πάει στο **2**..
6. Εάν συναντήσει **Y**, ελέγχει αν υπάρχουν **Y** ακολουθούμενα από **Z**."

Τυπικά, η TM $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$ θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά :

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, , q_{acc}, q_{rej}\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$\Gamma = \{0, 1, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \sqcup\},$$

$$s = q_0.$$

Η συνάρτηση μετάβασης δ είναι:

q	σ	$\delta(q, \sigma)$	Σχόλιο
q_0	0	$(q_1, \mathbf{X}, R)$	μαρκάρει αριστερότερο 0
q_0	$\sqcup$	$(q_{acc}, \sqcup, R)$	κενή συμβολοσειρά, αποδέχεται
q_1	0	$(q_1, 0, R)$	κινείται δεξιά, προσπερνά 0
q_1	Y	$(q_1, \mathbf{Y}, R)$	κινείται δεξιά, προσπερνά Y
q_1	1	$(q_2, \mathbf{Y}, R)$	συναντάει 1 και τον μαρκάρει με Y
q_2	1	$(q_2, 1, R)$	κινείται δεξιά, προσπερνά 1
q_2	Z	$(q_2, \mathbf{Z}, R)$	κινείται δεξιά, προσπερνά Z
q_2	0	$(q_3, \mathbf{Z}, L)$	συναντάει 0 και τον μαρκάρει με Z κάνει μεταβολή
q_3	0	$(q_3, 0, L)$	κινείται αριστερά προσπερνώντας 0
q_3	1	$(q_3, 1, L)$	κινείται αριστερά προσπερνώντας 1
q_3	Y	$(q_3, \mathbf{Y}, L)$	κινείται αριστερά προσπερνώντας Y
q_3	Z	$(q_3, \mathbf{Z}, L)$	κινείται αριστερά προσπερνώντας Z
q_3	X	$(q_4, \mathbf{X}, R)$	όταν συναντήσει X κάνει μεταβολή
q_4	0	$(q_1, \mathbf{X}, R)$	μπαίνει στην q_1 για νέα επανάληψη
q_4	Y	$(q_5, \mathbf{Y}, R)$	εξαντλήθηκαν τα πρώτα 0^n στην q_5
q_5	Y	$(q_5, \mathbf{Y}, R)$	προσπερνά μόνο Y
q_5	Z	$(q_6, \mathbf{Z}, R)$	όταν συναντήσει Z μπαίνει στην q_6
q_6	Z	$(q_6, \mathbf{Z}, R)$	προσπερνά μόνο Z , εάν υπάρχουν ...
q_6	$\sqcup$	$(q_{acc}, \sqcup, R)$	... μόνο Z που Y , αποδέχεται

□

Άσκηση 2. Περιγράψτε τον υπολογισμό της μηχανής της Άσκησης 1 για είσοδο 001100 και 00100.

Λύση. Η λειτουργία της μηχανής για είσοδο 001100 είναι,

$$\begin{aligned}
 (q_0, \underline{001100}) &\vdash_M (q_1, \mathbf{X}\underline{01100}) \vdash_M (q_1, \mathbf{X}0\underline{1100}) \vdash_M (q_2, \mathbf{X}0\underline{\mathbf{Y}100}) \vdash_M (q_2, \mathbf{X}0\underline{\mathbf{Y}1\underline{00}}) \\
 &\vdash_M (q_3, \mathbf{X}0\underline{\mathbf{Y}1\underline{\mathbf{Z}0}}) \vdash_M (q_3, \mathbf{X}0\underline{\mathbf{Y}1\underline{\mathbf{Z}0}}) \vdash_M (q_3, \mathbf{X}\underline{0}\underline{\mathbf{Y}1\underline{\mathbf{Z}0}}) \vdash_M (q_3, \underline{\mathbf{X}}0\underline{\mathbf{Y}1\underline{\mathbf{Z}0}}) \\
 &\vdash_M (q_4, \mathbf{X}\underline{0}\underline{\mathbf{Y}1\underline{\mathbf{Z}0}}) \vdash_M (q_1, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}1\underline{\mathbf{Z}0}}) \vdash_M (q_1, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}1\underline{\mathbf{Z}0}}) \vdash_M (q_2, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}0}}) \\
 &\vdash_M (q_2, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}0}}) \vdash_M (q_3, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \vdash_M (q_3, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \\
 &\vdash_M (q_3, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \vdash_M (q_3, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \vdash_M (q_4, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \\
 &\vdash_M (q_5, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \vdash_M (q_5, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \vdash_M (q_6, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}) \\
 &\vdash_M (q_6, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_{acc}, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}\underline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}\underline{\sqcup}\underline{\sqcup})
 \end{aligned}$$

Η λειτουργία της μηχανής για είσοδο 001100 είναι,

$$\begin{aligned} (q_0, \underline{00100}) \vdash_M (q_1, \underline{X01100}) \vdash_M (q_1, \underline{X0100}) \vdash_M (q_2, \underline{X0Y00}) \\ \vdash_M (q_3, \underline{X0YZ0}) \vdash_M (q_3, \underline{X0YZ0}) \vdash_M (q_3, \underline{X0YZ0}) \\ \vdash_M (q_4, \underline{X0YZ0}) \vdash_M (q_1, \underline{XXYZ0}) \vdash_M (q_1, \underline{XXYZ0}) \rightarrow \text{απόρριψη}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3. Δίνεται η γλώσσα

$$A_{HY280} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και αποδέχεται την συμβολοσειρά } HY280\}.$$

Να αποδείξετε ότι η A_{HY280} δεν είναι διαγνώσιμη.

Λύση. Έστω ότι η A_{HY280} είναι διαγνώσιμη, άρα υπάρχει μηχανή Turing, έστω D , η οποία διαγιγνώσκει την A_{HY280} . Θα κάνουμε αναγωγή το $HALT_{TM}$ στο A_{HY280} . Κατασκευάζουμε μια μηχανή Turing, έστω T , η οποία να διαγιγνώσκει την γλώσσα $HALT_{TM}$.

$T =$ “ Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M TM και $w \in \Sigma^*$:

1. Κωδικοποιούμε την TM $M'(x)$ ως εξής:
Εκτέλεσε M με είσοδο w .
2. Αν η D για είσοδο $\langle M' \rangle$ αποδεχθεί, τότε αποδέχεται.
3. Αν η D για είσοδο $\langle M' \rangle$ απορρίπτει, τότε απορρίπτεται.”

Συνεχίζουμε, με την απόδειξη την ορθότητας. Έστω ότι η M τερματίζει για είσοδο w , τότε η M' αποδέχεται κάθε είσοδο x . Δηλαδή, αποδέχεται την συμβολοσειρά $HY280$. Άρα η D αποδέχεται την $\langle M' \rangle$. Επομένως, η T αποδέχεται την $\langle M, w, \rangle$. Έστω ότι η M δεν τερματίζει για είσοδο w , τότε η M' δεν αποδέχεται για κάθε είσοδο x . Δηλαδή, η M' δεν αποδέχεται την συμβολοσειρά $HY280$. Άρα η D απορρίπτει την $\langle M' \rangle$. Επομένως, η T απορρίπτει την $\langle M, w \rangle$. Και στις δύο περιπτώσεις η λειτουργία της T είναι ορθή. Συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο καθώς η $HALT_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη. Επομένως και η A_{HY280} δεν είναι διαγνώσιμη. □

Άσκηση 4. Δίνεται ένα DFA D και μια κανονική έκφραση (Regex) R . Θεωρείστε το πρόβλημα καθορισμού της ισοδυναμίας μεταξύ D και R . Είναι το πρόβλημα επιλύσιμο;

Λύση. Αρχικά θα γράψουμε τυπικά, δηλαδή με μια γλώσσα, το πρόβλημα. Η γλώσσα του προβλήματος είναι:

$$EQ_{DFA, \text{Regex}} = \{\langle D, R \rangle \mid D \text{ DFA, } R \text{ Regex και } L(D) = L(R)\}.$$

Θα κατασκευάσουμε TM για το $EQ_{DFA,Regex}$ ως εξής:

$S =$ “ Για είσοδο $\langle D, R \rangle$, όπου D DFA και R Regex:

1. Μετατρέπουμε την R στο ισοδύναμο DFA B .
2. Χρησιμοποιούμε την EQ_{DFA} για είσοδο $\langle D, B \rangle$.
3. Έξοδος, το αποτέλεσμα του διαγνώστη της EQ_{DFA} .”

Εφόσον η EQ_{DFA} είναι διαγνώσιμη και η μετατροπή της R στο αυτόματο B απαιτεί πεπερασμένο χρόνο, τότε η $EQ_{DFA,Regex}$ είναι διαγνώσιμη. Συνεπώς, το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. $\square$

Άσκηση 5. Θεωρείστε μια TM M 2-ταινιών 2-TM η οποία γράφει ένα μη-κενό σύμβολο στην δεύτερη ταινία μόνο όταν υπολογίζει κάποια συμβολοσειρά. Είναι η γλώσσα των M με την προαναφερθείσα περιγραφή διαγνώσιμη;

Λύση. Αρχικά, γράφουμε τυπικά την γλώσσα της εκφώνησης. Αυτή είναι η,

$$A = \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ 2-TM η οποία γράφει ένα μη-κενό σύμβολο στην δεύτερη} \\ \text{ταινία μόνο όταν υπολογίζει κάποια συμβολοσειρά.} \end{array} \right\}$$

Υποθέτουμε ότι η A είναι διαγνώσιμη, άρα υπάρχει TM διαγνώστης R η οποία διαγιγνώσκει για την A . Θα κάνουμε αναγωγή από το A_{TM} στη A . Προς αυτό, θα κατασκευάσουμε TM S η οποία να διαγιγνώσκει για την A_{TM} ως εξής:

$S =$ “ Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M και w συμβολοσειρά:

1. Από M και w κατασκευάσε 2- T_w ως εξής:

$T_w =$ “ Για είσοδο $\langle M, w \rangle$:

1. Προσομοίωσε την M για w στην 1η ταινία.
2. Αν η προσομοίωση καταλήξει σε αποδοχή, τότε γράψε μη-κενό σύμβολο στην 2η ταινία.”
2. Εκτέλεσε R στο $\langle T_w \rangle$ και έλεγξε αν το T_w γράφει μη-κενό σύμβολο.
3. Αν R αποδέχεται, τότε M αποδέχεται w , αποδέχεται.

Αλλιώς, απορρίπτει.”

Άρα η A_{TM} είναι διαγνώσιμη, το οποίο αποτελεί αντίφαση καθώς η A_{TM} δεν είναι διαγνώσιμη. Συνεπώς, A είναι μη-διαγνώσιμη γλώσσα. $\square$

Άσκηση 6. Δίνεται η γλώσσα

$$L = \{ \langle M, D \rangle \mid M \text{ TM}, D \text{ DFA } L(M) = L(D) \}.$$

Να αποδείξετε ότι η $L_{Pεγνληαp}$ δεν είναι διαγνώσιμη.

Λύση. Θα κάνουμε αναγωγή από το A_{TM} στο L . Έστω ότι η L είναι διαγνώσιμη, άρα υπάρχει μηχανή Turing, έστω S , η οποία την διαγιγνώσκει. Κατασκευάζουμε μια μηχανή Turing, έστω H , η οποία να διαγιγνώσκει την γλώσσα A_{TM} .

$H =$ “ Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M TM και $w \in \Sigma^*$:

1. Κωδικοποιούμε την TM $M'(x)$ ως εξής:

Αν $x \neq w$ απέρριψε.

Αλλιώς, εκτέλεσε M με είσοδο w .

Αν η M αποδεχθεί, αποδέχεται.

Αν η M απορίπτει, απορρίπτει.

2. Κωδικοποιούμε ένα DFA D τ.ω. $L(D) = L(w) = \{w\}$.

3. Εκτελούμε την S με είσοδο $\langle M', D \rangle$.

4. Αν αποδεχθεί, αποδέχεται.

Αλλιώς, απορρίπτει.”

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της ορθότητας. Εάν $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$, τότε ο M αποδέχεται την w . Επομένως, η M' δέχεται την w και απορρίπτει όλα τα υπόλοιπα, άρα $L(M') = \{w\}$. Συνεπώς, $L(M') = L(D)$, και έτσι η S αποδέχεται την $\langle M', D \rangle$. Άρα η H αποδέχεται το $\langle M, w \rangle$.

Αν $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$, τότε η M δεν αποδέχεται το w . Επομένως, $L(M') = \emptyset$. Άρα $L(M') \neq L(D)$, αφού $L(D) = \{w\}$. Επομένως, η S απορρίπτει το $\langle M', D \rangle$ και έτσι η H απορρίπτει την x . Συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο καθώς η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη. Επομένως και η L δεν είναι διαγνώσιμη. $\square$

Άσκηση 7. Δίνονται τα προβλήματα A και B . Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. $A \leq B$

2. $\bar{A} \leq B$

3. $\bar{A} \leq \bar{B}$

4. $A \leq \bar{B}$

Λύση. 1) $\Rightarrow$ 2) : Έστω $A \leq B$. Επομένως, αν υπάρχει ένας διαγνώστης O για το B , μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη R για το A . Έστω ότι ο R' εκτελεί τον R και επιστρέφει το αντίθετο αποτέλεσμα. Ο R' είναι ένας διαγνώστης για το $\bar{A}$ χρησιμοποιώντας τον O . Άρα, $\bar{A} \leq B$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Έστω $\overline{A} \leq B$. Αν υπήρχε ένας διαγνώστης O για το B , τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη O' για το $\overline{B}$ εκτελώντας τον O και επιστρέφοντας το αντίθετο αποτέλεσμα. Αλλά, εφόσον $\overline{A} \leq B$, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον O' για να κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη για το A . Επομένως, $\overline{A} \leq \overline{B}$.

3) $\Rightarrow$ 4) : Έστω $\overline{A} \leq \overline{B}$. Επομένως, αν υπάρχει ένας διαγνώστης O για το $\overline{B}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη R για το $\overline{A}$. Έστω ότι ο R' εκτελεί τον R και επιστρέφει το αντίθετο αποτέλεσμα. Ο R' είναι διαγνώστης για το $A = \overline{\overline{A}}$ χρησιμοποιώντας τον O . Άρα, $A \leq \overline{B}$.

4) $\Rightarrow$ 1) : Έστω $A \leq \overline{B}$. Αν υπήρχε ένας διαγνώστης O για το $\overline{B}$, τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη O' για το $\overline{B}$ εκτελώντας τον O και επιστρέφοντας το αντίθετο αποτέλεσμα. Αλλά, εφόσον $A \leq \overline{B}$, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον O' για να κατασκευάσουμε έναν διαγνώστη για το A . Επομένως, $A \leq B$. $\square$