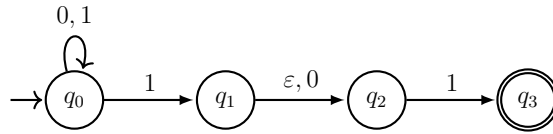


ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού

Φροντιστήριο 2

03/10/2025

Άσκηση 1. Δίδεται το αυτόματο



Βρείτε ποιες από τις παρακάτω συμβολοσειρές αναγνωρίζει

101011, 010101, 001000

Λύση. Για την 101011

τρέχων σύνολο καταστάσεων	σύμβολο
$\{q_0\}$ (αρχική)	1
$\{q_0, q_1, q_2\}$	0
$\{q_0, q_2\}$	1
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	0
$\{q_0, q_2\}$	1
$\{q_0, q_1, q_2\}$	1
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	αναγνωρίζεται

Ακολουθώντας τον μαθηματικό φορμαλισμό, ο υπολογισμός είναι:

$$\begin{aligned}
 (q_0, 101011) \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2\}, 01011) \vdash_M (\{q_0, q_2\}, 1011) \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, 011) \\
 \vdash_M (\{q_0, q_2\}, 11) \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2\}, 1) \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός ολοκληρώθηκε και το αυτόματο M βρέθηκε στο σύνολο καταστάσεων $A = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$. Αν υπάρχει τουλάχιστον μια κατάσταση στο A που είναι τερματική στο M , τότε η συμβολοσειρά 101011 αναγνωρίζεται από το αυτόματο. Πράγματι υπάρχει τέτοια κατάσταση, η q_3 .

Για την 010101,

$$(q_0, 010101) \vdash_M (q_0, 10101) \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2\}, 0101) \vdash_M (\{q_0, q_2\}, 101) \\ \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, 01) \vdash_M (\{q_0, q_2, \}, 1) \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \varepsilon).$$

Άρα το M αναγνωρίζει την συμβολοσειρά 010101.

Για την 001000,

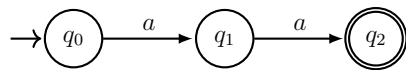
$$(q_0, 001000) \vdash_M (q_0, 01000) \vdash_M (q_0, 1000) \vdash_M (\{q_0, q_1, q_2\}, 000) \\ \vdash_M (\{q_0, q_2\}, 00) \vdash_M (q_0, 0) \vdash_M (q_0, \varepsilon).$$

Άρα το M δεν αναγνωρίζει την συμβολοσειρά 001000 καθώς με την ολοκλήρωση του υπολογισμού το αυτόματο βρέθηκε στην κατάσταση q_0 η οποία δεν είναι τερματική. $\square$

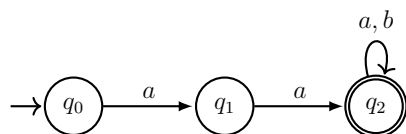
Άσκηση 2. Κατασκευάστε πεπερασμένο αυτόματο για την γλώσσα

$$A = \{aaw \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

Λύση. Ξεκινάμε από την συμβολοσειρά της A με το μικρότερο μήκος. Αυτή είναι η aa . Άρα το αυτόματο θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις καταστάσεις, τις q_0 , q_1 και q_2 . Θεωρούμε ότι η q_0 είναι η αρχική κατάσταση. Από την q_0 διαβάζοντας a , το αυτόματο, θα μεταβεί στην q_1 , από την οποία διαβάζοντας a θα μεταβεί στην q_2 και θα αναγνωριστεί. Συνεπώς, η q_2 θα είναι τελική κατάσταση. Άρα η συμβολοσειρά aa αναγνωρίζεται από το παρακάτω αυτόματο.

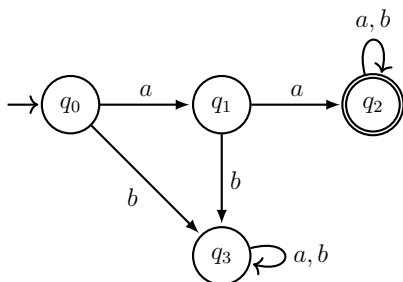


Καθώς για την υποσυμβολοσειρά w δεν έχουμε κανέναν περιορισμό ($w \in \{a, b\}^*$), το αυτόματο θα πρέπει να δέχεται οποιαδήποτε υποσυμβολοσειρά w . Συνεπώς, το αυτόματο που αναγνωρίζει την A θα είναι



Το αυτόματο που κατασκευάσαμε αναγνωρίζει την γλώσσα και είναι μη-ντετερμινιστικό. Αν θέλουμε να είναι ντετερμινιστικό, συνεχίζουμε την κατασκευή του προσθέτοντας μεταβάσεις ώστε να είμαστε συμβατοί με τον ορισμό $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$.

Η γλώσσα δεν περιέχει συμβολοσειρές που ξεκινάνε είτε με ab είτε με b . Άρα θα προσθέσουμε μονοπάτια που οδηγούν σε μη-τερματικές κορυφές τους υπολογισμούς για κάθε συμβολοσειρά που έχει ένα από τα προθέματα ab , b .



□

Άσκηση 3. Κατασκευάστε το NFA για την γλώσσα

$$A = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ τελειώνει είτε σε } 01 \text{ είτε σε } 10\}.$$

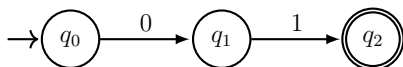
Λύση. Παρατηρούμε ότι η γλώσσα A είναι ένωση των γλωσσών, $A = A_1 \cup A_2$,

$$A_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ τελειώνει σε } 01\}.$$

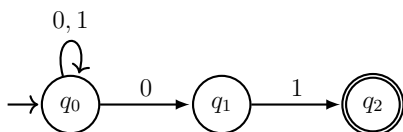
$$A_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ τελειώνει σε } 10\}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε τα NFAs N_1 και N_2 που αναγνωρίζουν, αντίστοιχα, καθεμία από τις A_1 και A_2 . Στην συνέχεια θα πρέπει συνδέσουμε κατάλληλα τα δύο N_1, N_2 . [δείτε τον τρόπο από την κατασκευή στην απόδειξη του αντίστοιχου Θεωρήματος που είδαμε στις διαλέξεις.]

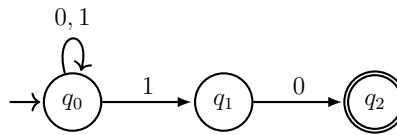
Για το A_1 δουλεύουμε ως εξής: Αρχικά, παίρνουμε την μικρότερη σε μήκος συμβολοσειρά της γλώσσας A_1 , αυτή είναι η 01. Συνεπώς, το αυτόματο θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις καταστάσεις q_0, q_1 και q_2 . Θεωρούμε ότι η q_0 είναι η αρχική κατάσταση. Από την q_0 διαβάζοντας 0 θα μεταβεί στην q_1 , από την οποία διαβάζοντας 1 θα μεταβεί στην q_2 , όπου και θα αναγνωριστεί. Άρα η συμβολοσειρά 01 γίνεται αποδεκτή από το παρακάτω αυτόματο.



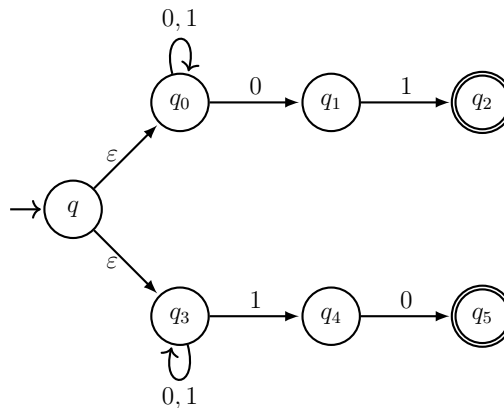
Εν συνεχεία, θα πρέπει το N_1 να δέχεται και όλες τις συμβολοσειρές της μορφής $x01$, όπου $x \in \{0, 1\}^*$. Προς αυτό, αρκεί ένας βρόγχος στην q_0 με ετικέτα $\{0, 1\}$, καθώς με αυτόν τον τρόπο αναπαράγονται όλα τα δυνατά x . Άρα το N_1 θα έχει την μορφή



Με την ίδια ακριβώς επιχειρηματολογία κατασκευάζουμε το N_2 το οποίο και έχει την μορφή



Τώρα μένει να ενώσουμε τα αυτόματα N_1 και N_2 . Καθώς τώρα προέκυψαν δύο καταστάσεις με ονομασία q_0, q_1 και q_2 , τις καταστάσεις του N_2 τις μετονομάζουμε σε q_3, q_4 και q_5 αντίστοιχα. Στη συνέχεια προσθέτουμε μια καινούργια αρχική κατάσταση, έστω q , την οποία συνδέουμε με τις καταστάσεις q_0 και q_3 μέσω ε -μεταβάσεων. Έτσι οι καταστάσεις q_0 και q_3 παύουν να είναι αρχικές. Το αυτόματο που αναγνωρίζει την γλώσσα A θα έχει την μορφή



□

Σχόλιο. Αν εξετάσουμε τις Ασκήσεις 2 και 3, θα δούμε ότι στην πρώτη χρειάστηκε να βάλουμε και τις μεταβάσεις που καταλήγουν σε μη-τερματικές κορυφές. Απ'την άλλη, στην Άσκηση 3 αυτό δεν χρειάστηκε. Η διαφορά είναι ότι στην Άσκηση 2 προέκυψε ντετερμινιστικό αυτόματο και ορισμός του απαιτεί όταν ο υπολογισμός βρίσκεται σε μια κατάσταση και διαβάσει ένα σύμβολο να ξέρει που θα μεταβεί. Στην Άσκηση 3, τα αυτόματα A_1, A_2, A είναι μη-ντετερμινιστικά, εδώ ο ορισμός των μεταβάσεων είναι $\delta : K \times \{\Sigma \cup \varepsilon\} \rightarrow 2^K$ και το 2^K περιέχει και την $\emptyset$, επομένως δεν χρειάζεται να ορίσουμε όλες τις μη-τερματικές μεταβάσεις.

Άσκηση 4. Έστω η γλώσσα

$$A = \{xy \in \{0,1\}^* \mid (n_x \equiv 0 \bmod 3 \text{ ή } n_x \equiv 1 \bmod 3) \text{ και } n_y \equiv 2 \bmod 3\},$$

όπου n_x, n_y είναι οι ακέραιοι των οποίων η δυαδική αναπαράσταση είναι οι x, y , αντίστοιχα. Κατασκευάστε αυτόματο που να αναγνωρίζει την A . [Θυμηθείτε ότι, $m \equiv n \bmod k$ ¹ σημαίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του $m - n$ με το k .]

¹Σε κάποια συγγράμματα ο ορισμός του $\bmod$ γράφεται με $=$.

Λύση. Παρατηρείστε ότι η γλώσσα A μπορεί να περιγραφεί ως παράθεση των γλωσσών A_1, A_2 , δηλαδή $A = A_1 A_2$, όπου

$$A_1 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid n_x \equiv 0 \pmod{3} \text{ ή } n_x \equiv 1 \pmod{3}\},$$

$$A_2 = \{y \in \{0, 1\}^* \mid n_y \equiv 2 \pmod{3}\}.$$

Αρχικά, θα βρούμε τα αυτόματα για καθεμία από τις A_1, A_2 , ξεχωριστά.

Για την A_1 έχουμε ότι το αυτόματο, έστω M_1 , θα έχει τρεις καταστάσεις, όσα και τα διαφορετικά υπόλοιπα που μπορούν να προκύψουν διαιρώντας ακεραίους με το 3. Έστω ότι αυτές είναι οι q_0, q_1 και q_2 . Επίσης, εξ υποθέσεως, το M_1 θα πρέπει να δέχεται είτε τις δυαδικές αναπαραστάσεις ακεραίων που έχουν υπόλοιπο μηδέν όταν διαιρούνται με το 3 ($n_x \equiv 0 \pmod{3}$) είτε τις δυαδικές αναπαραστάσεις ακεραίων που έχουν υπόλοιπο ένα όταν διαιρούνται με το 3 ($n_x \equiv 1 \pmod{3}$).

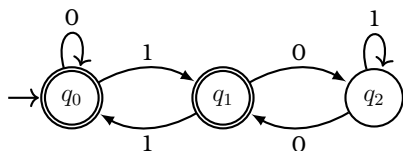
Για τις μεταβάσεις στο M_1 παρατηρούμε ότι: αν προσθέσουμε 0 στην δυαδική συμβολοσειρά του k η τιμή διπλασιάζεται $k \rightarrow 2k$. [π.χ., $11 = (3)_2 \rightarrow 110 = (6)_2$, $0 = (\varepsilon)_2 \rightarrow 0 = (0)_2$]. Αντίστοιχα, όταν προσθέτουμε 1 η τιμή του αλλάζει από k σε $2k + 1$. [π.χ., $11 = (3)_2 \rightarrow 111 = (7)_2$, $0 = (\varepsilon)_2 \rightarrow 1 = (1)_2$].²

Εξαντλητικά ελέγχουμε όλες τις καταστάσεις του M_1 .

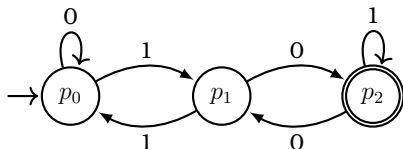
- Για την q_0 :
 - Για 0 η τιμή διπλασιάζεται άρα συνεχίζει να είναι διαιρετή με το 3, επομένως παραμένουμε στην q_0 .
 - Για 1 η νέα τιμή αφήνει υπόλοιπο 1, οπότε μεταβαίνουμε στην κατάσταση q_1 .
- Για την q_1 :
 - Για 0 η τιμή διπλασιάζεται και το υπόλοιπο επίσης διπλασιάζεται, επομένως μεταβαίνουμε στην q_2 .
 - Για 1 η νέα τιμή αυξάνεται κατά $2k + 1$ οδηγώντας σε υπόλοιπο $3 = \text{υπόλοιπο } 0$. Έτσι, μεταβαίνουμε στην q_0 .
- Για την q_2 :
 - Για 0 η τιμή διπλασιάζεται οδηγώντας σε υπόλοιπο $4 = \text{υπόλοιπο } 1$. Έτσι, μεταβαίνουμε στην q_1 .
 - Για 1 η νέα τιμή αυξάνεται κατά $2k + 1$ οδηγώντας σε υπόλοιπο $5 = \text{υπόλοιπο } 2$. Έτσι, παραμένουμε στην κατάσταση q_2 .

²Δείτε την ανάλυση στην Διάλεξη 2.

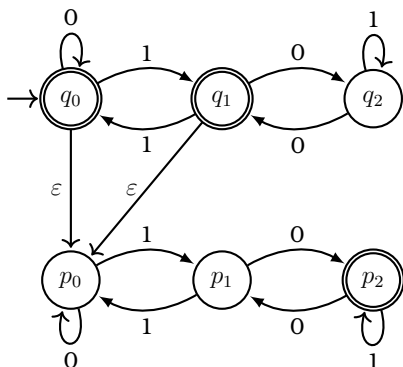
Συνεπώς, το αυτόματο M_1 είναι



Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία κατασκευάζουμε το αυτόματο, έστω M_2 , που αναγνωρίζει την γλώσσα A_2 , το οποίο είναι



Για το αυτόματο που αναγνωρίζει την A , θα έχουμε την αρχική κατάσταση του M_1 . Επίσης, όταν το x μέρος της εισόδου τερματίζει, τότε το y μέρος της εισόδου θα προσπελαύνεται από το M_2 . Άρα το αυτόματο που αναγνωρίζει την A θα έχει την μορφή



□

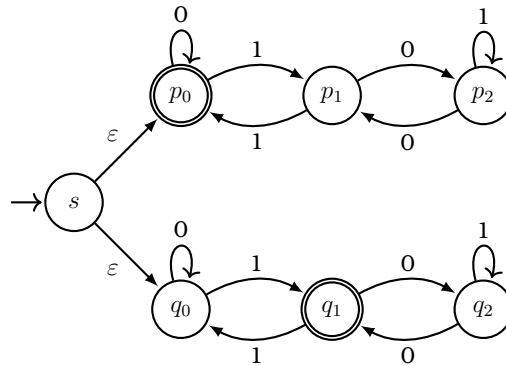
Σχόλιο. Για την λύση της Άσκησης 4 χωρίσαμε την A σε A_1 και A_2 και τις παραθέσαμε καθώς οι συμβολοσειρές $w \in A$, έχουν δύο διακεκριμένες υποσυμβολοσειρές x, y , με $w = xy$, όπου το $x \in A_1$ και $y \in A_2$. Θα μπορούσαμε να χωρίσουμε την A στις γλώσσες

$$B_1 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid n_x \equiv 0 \pmod{3}\}, \quad B_2 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid n_x \equiv 1 \pmod{3}\},$$

άρα έχουμε $A_1 = B_1 \cup B_2$. Σε αυτή την περίπτωση τα αυτόματα για τις B_1 και B_2 θα ήταν,



αντίστοιχα. Το αυτόματο που αναγνωρίζει την A_1 τώρα θα είναι (με κατάλληλη αλλαγή ονομάτων στις καταστάσεις) το,



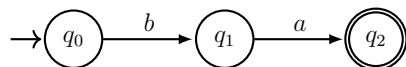
Τόσο το συγκεκριμένο αυτόματο όσο και το αυτόματο που κατασκευάσαμε στην κυρίως λύση, για την A_1 , είναι ισοδύναμα.

Άσκηση 5. Έστω η γλώσσα

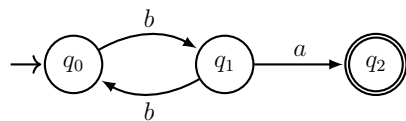
$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ξεκινάει με περιττό αριθμό από } b \text{ και τελειώνει με ένα } a\}.$$

Αρχικά, βρείτε το αυτόματο που αναγνωρίζει την L . Στην συνέχεια κατασκευάστε το αυτόματο που αναγνωρίζει την L^* .

Λύση. Ξεκινάμε από την συμβολοσειρά της L με το μικρότερο μήκος. Αυτή είναι η ba . Άρα το αυτόματο, έστω M , θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις καταστάσεις, τις q_0 , q_1 και q_2 . Θεωρούμε ότι η q_0 είναι η αρχική κατάσταση. Από την q_0 διαβάζοντας b θα μεταβεί στην q_1 , από την οποία διαβάζοντας a θα μεταβεί στην q_2 και θα αναγνωριστεί από το M . Συνεπώς, η q_2 θα είναι τελική κατάσταση. Άρα η συμβολοσειρά ba γίνεται αποδεκτή από το παρακάτω αυτόματο



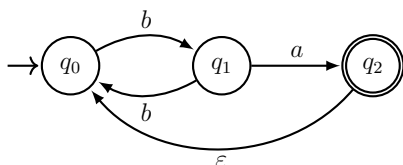
Το αυτόματο θα πρέπει να αναγνωρίζει περιττό αριθμό b . Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε την μετάβαση από την q_0 στην q_1 με σύμβολο b , η διαδρομή $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ διατρέχει συμβολοσειρές με περιττό αριθμό από b . Συνεπώς, το αυτόματο M που αναγνωρίζει την L είναι το ακόλουθο



Τώρα, για την L^* . Θυμηθείτε ότι η πράξη Kleene star είναι όπως η πράξη της παράθεσης, αλλά με την διαφορά ότι είναι επαναλαμβανόμενη. Δηλαδή το νέο αυτόματο, N , θα πρέπει να αναγνωρίζει όλες τις συμβολοσειρές $w_1 \circ \dots \circ w_n$ όπου $w_i \in A$ και $i \in [n]$, για $n \geq 0$.

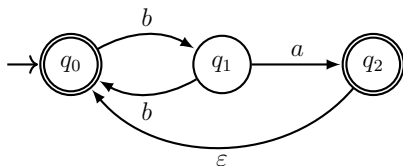
Εφόσον, το M αναγνωρίζει την L θα το χρησιμοποιήσουμε ως βάση για το N . Αυτό που θα πρέπει να προσέξουμε είναι ότι το N θα πρέπει **μη-ντετερμινιστικά** να επανέρχεται στην κατάσταση q_0 . Με άλλα λόγια, θέλουμε να μπορούμε να διατρέχουμε το M επαναλαμβάνόμενα για διαφορετικές υποσυμβολοσειρές της εισόδου, αλλά και να διακρίνουμε πότε αυτές οι συμβολοσειρές γίνονται αποδεκτές. [πρακτικά αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε την $L \circ L$, η οποία ανήκει στην L^* , το αυτόματο θα πρέπει να μπορεί να διαβάσει την $bbba$ από την πρώτη L και την ba από την δεύτερη L . Εφόσον, έχουμε $L \circ L$ η συνολική συμβολοσειρά που θα κληθεί να διαβάσει το αυτόματο θα είναι η $bbba \circ ba$]

Μια ιδέα είναι να προσθέσουμε την ε -μετάβαση από την q_2 στην q_0 , δηλαδή το N θα έχει την μορφή



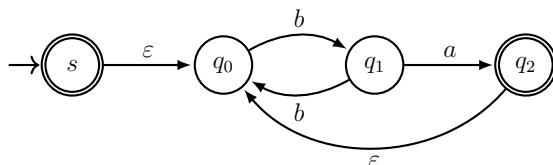
Αυτό όμως δεν είναι σωστό, και ο λόγος είναι ότι η L^* περιέχει και την ε την οποία το παραπάνω αυτόματο δεν αναγνωρίζει, καθώς το q_0 δεν είναι τελική κατάσταση.

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα κάνοντας την q_0 τελική κατάσταση, τότε το καινούργιο αυτόματο θα αναγνώριζε την L^* και θα είχε την μορφή



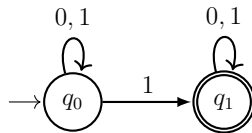
, **αλλά** θα αναγνώριζε και τις συμβολοσειρές που ξεκινάνε με άρτιο αριθμό b . Επομένως, πάλι θα ήταν λάθος.

Η ιδέα που θα δώσει την απάντηση στο ερώτημα είναι να επέμβουμε όσο το δυνατόν λιγότερο την λειτουργία του M . Το q_0 θα παραμείνει μη-τερματική κατάσταση και θα προσθέσουμε μια καινούργια αρχική/τελική κατάσταση, έστω s , από την οποία θα μεταβαίνουμε στην q_0 μέσω ε -μετάβασης. Δηλαδή θα έχουμε το παρακάτω αυτόματο,



Τώρα το αυτόματο λύνει τα ζητήματα των δύο προηγούμενων προσπαθειών. Δηλαδή αναγνωρίζει την ε όπως έκανε και η πρώτη απόπειρα, και δεν αναγνωρίζει συμβολοσειρές με άρτιο αριθμό b όπως έκανε η δεύτερη προσπάθεια. $\square$

Άσκηση 6. Μετατρέψτε το παρακάτω NFA στο ισοδύναμο DFA.



Λύση. Έχουμε το NFA $N = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε το ισοδύναμο DFA $M = (K', \Sigma, \delta', s', F')$, με αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή στην απόδειξη του θεωρήματος ισοδυναμίας μεταξύ DFA και NFA.

Σύνολο καταστάσεων του M' : $K' = 2^K$, δηλαδή

$$K' = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_0, q_1\}\}.$$

Για ευκολία γράφουμε q_{ij} αντί για $q_i q_j$ και q_{ijk} αντί για $q_i q_j q_k$. Άρα το K' γράφεται

$$K' = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_{01}\}\}.$$

Μεταβάσεις: Το M έχει ως καταστάσεις υποσύνολα καταστάσεων του N . Για κατάσταση $p \in K'$ και σύμβολο $a \in \Sigma$ έχουμε

$$\delta'(p, a) = \{q \in K \mid q \in \delta(r, a) \text{ για κάποιο } r \in p\},$$

δηλαδή το υποσύνολο καταστάσεων p του K , $p \subseteq K$, όταν η κεφαλή διαβάσει το σύμβολο a θα μεταβεί στις καταστάσεις, όπως το ορίζει η συνάρτηση μετάβασης του N [δηλαδή στις καταστάσεις που μεταβαίνει καθεμία από τις καταστάσεις του p σύμφωνα με την δ]. Άρα θα προκύψει ένα νέο υποσύνολο p' του K . Όμως, καθώς το K' έχει **όλα** τα υποσύνολα του K , το p' θα είναι **μία** κατάσταση του K' .

δ'	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_{01}\}$
0	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_{01}\}$
1	$\emptyset$	$\{q_{01}\}$	$\{q_1\}$	$\{q_{01}\}$

Σύμφωνα με τον ορισμό της δ' , όταν το αυτόματο διαβάσει 1 και βρίσκεται στην κατάσταση q_0 , τότε έχουμε

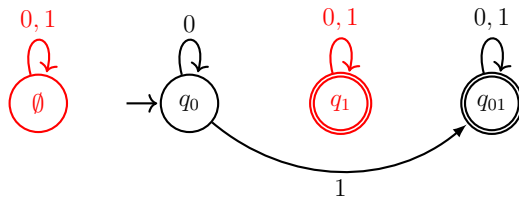
$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} = q_{01}.$$

Άρα, $\delta'(q_0, 1) = q_{01}$.

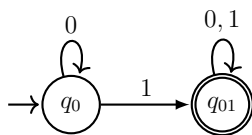
Αρχική κατάσταση: Το M ξεκινάει από την κατάσταση του K' που περιέχει μόνο την αρχική κατάσταση του N , δηλαδή $q'_0 = \{q_0\}$.

Τελικές καταστάσεις: $F' = \{p \in K' \mid p \text{ περιέχει τελική κατάσταση του } N\}$. Το N έχει μοναδική τελική κατάσταση, την q_2 , άρα $F' = \{\{q_1\}, \{q_{01}\}\}$.

Αν φτιάξουμε το αυτόματο³ που προκύπτει από την προηγούμενη ανάλυση καταλήγουμε στο



Μας ενδιαφέρουν μόνο οι καταστάσεις του M που είναι **προσβάσιμες** από την q_0 χρησιμοποιώντας τις μεταβάσεις δ' . Παρατηρείστε ότι οι κόκκινες καταστάσεις δεν είναι προσβάσιμες από την q_0 , άρα δεν ανήκουν στο M , όπως και οι μεταβάσεις που τις συνδέουν. Συνεπώς το ισοδύναμο DFA M είναι

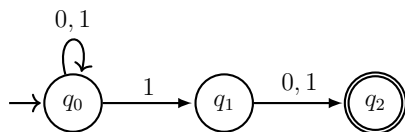


Παρατηρείστε ότι δεν χρειάζεται να συμπεριλάβουμε κατάσταση αδιεξόδου. □

Άσκηση 7. Έστω η γλώσσα

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ με 2ο σύμβολο από το τέλος το } 1\}.$$

Το NFA N που αναγνωρίζει την L είναι το ακόλουθο



Βρείτε το ισοδύναμο DFA M , δηλαδή $L(N) = L(M)$.

Λύση. Έχουμε το NFA $N = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε το ισοδύναμο DFA $M = (K', \Sigma, \delta', s', F')$, με αλφάβητο $\Sigma = \{0,1\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την

³Δεν συμπεριλάβαμε τις μεταβάσεις προς την $\{\emptyset\}$ κατάσταση.

κατασκευή στην απόδειξη του θεωρήματος ισοδυναμίας μεταξύ DFA και NFA.

Σύνολο καταστάσεων του M' : $K' = 2^K$, δηλαδή

$$K' = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}.$$

Για ευκολία γράφουμε q_{ij} αντί για $q_i q_j$ και q_{ijk} αντί για $q_i q_j q_k$. Άρα το K' γράφεται

$$K' = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_{01}\}, \{q_{02}\}, \{q_{12}\}, \{q_{012}\}\}.$$

Μεταβάσεις: Για κατάσταση $p \in K'$ και σύμβολο $a \in \Sigma$ έχουμε

$$\delta'(p, a) = \{q \in K \mid q \in \delta(r, a) \text{ για κάποιο } r \in p\},$$

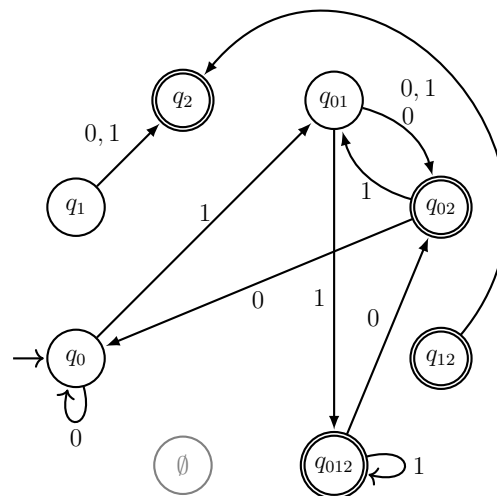
δηλαδή

δ'	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_{01}\}$	$\{q_{02}\}$	$\{q_{12}\}$	$\{q_{012}\}$
0	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_{02}\}$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_{02}\}$
1	$\emptyset$	$\{q_{01}\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_{012}\}$	$\{q_{01}\}$	$\{q_2\}$	$\{q_{012}\}$

Αρχική κατάσταση: Το M ξεκινάει από την κατάσταση του K' που περιέχει μόνο την αρχική κατάσταση του N , δηλαδή $q'_0 = \{q_0\}$.

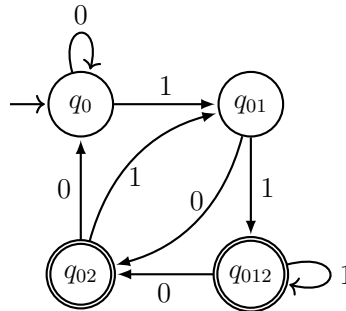
Τελικές καταστάσεις: $F' = \{p \in K' \mid p \text{ περιέχει τελική κατάσταση του } N\}$. Το N έχει μοναδική τελική κατάσταση, την q_2 , άρα $F' = \{\{q_2\}, \{q_{02}\}, \{q_{12}\}, \{q_{012}\}\}$.

Αν φτιάξουμε το αυτόματο⁴ που προκύπτει από την προηγούμενη ανάλυση καταλήγουμε στο



⁴Δεν συμπεριλάβαμε τις μεταβάσεις προς την $\{\emptyset\}$ κατάσταση.

Στη συνέχεια διαγράφουμε τις μη-προσβάσιμες καταστάσεις, q_1, q_2, q_{12} , και τις εισερχόμενες/εξερχόμενες ακμές τους. Επίσης, δεν χρειάζεται να έχουμε κάποια κατάσταση αδιεξόδου. Συνεπώς το ισοδύναμο DFA M είναι



□

Άσκηση 8. Βρείτε τις γλώσσες που αντιστοιχούν στις παρακάτω κανονικές εκφράσεις

1. $\sigma : ((0 \cup 1)^*(10))$

2. $\tau : (1 \cup (10))^*$

Λύση.

1.

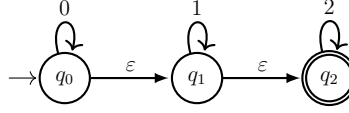
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}((0 \cup 1)^*(10)) &= \mathcal{L}((0 \cup 1)^*)\mathcal{L}((10)) & [\mathcal{L}((R_1 R_2)) &= \mathcal{L}(R_1)\mathcal{L}(R_2)] \\
 &= (\mathcal{L}(0 \cup 1))^*(\mathcal{L}(1)\mathcal{L}(0)) & [\mathcal{L}(R_1^*) &= \mathcal{L}(R_1)^* \text{ και} \\
 &= (\mathcal{L}(0) \cup \mathcal{L}(1))^*\{1\}\{0\} & \mathcal{L}((R_1 R_2)) &= \mathcal{L}(R_1)\mathcal{L}(R_2)] \\
 &= \{0, 1\}^*\{1\}\{0\} & [\mathcal{L}(a) &= \{a\} \text{ και} \\
 & & \mathcal{L}((R_1 \cup R_2)) &= \mathcal{L}(R_1) \cup \mathcal{L}(R_2)] \\
 & & [\mathcal{L}(a) &= \{a\}].
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}((1 \cup (10))^*) &= (\mathcal{L}(1 \cup (10)))^* & [\mathcal{L}(R_1^*) &= \mathcal{L}(R_1)^*] \\
 &= (\mathcal{L}(1) \cup \mathcal{L}((10)))^* & [\mathcal{L}((R_1 \cup R_2)) &= \mathcal{L}(R_1) \cup \mathcal{L}(R_2)] \\
 &= (\mathcal{L}(1) \cup (\mathcal{L}(1)\mathcal{L}(0)))^* & [\mathcal{L}((R_1 R_2)) &= \mathcal{L}(R_1)\mathcal{L}(R_2)] \\
 &= (\{1\} \cup \{1\}\{0\})^* & [\mathcal{L}(a) &= \{a\}] \\
 &= \{1, 10\}^*
 \end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. Μετατρέψτε το παρακάτω NFA με ε -μεταβάσεις σε ισοδύναμο NFA χωρίς ε -μεταβάσεις.



Λύση. Από το αυτόματο $N = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ του γραφήματος θα κατασκευάσουμε το νέο αυτόματο $N' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$. Τα αυτόματα N, N' θα έχουν το ίδιο αλφάβητο, το ίδιο πλήθος καταστάσεων, $K = K'$, και την ίδια αρχική κατάσταση, $s = s'$. Για τις μεταβάσεις δ' , αρχικά υπολογίζουμε τις ε -κλειστότητες των καταστάσεων του N

$$\text{cl}_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \text{cl}_\varepsilon(q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad \text{cl}_\varepsilon(q_2) = \{q_2\}.$$

[Το $\text{cl}_\varepsilon(q)$ σημαίνει $\delta(q, \varepsilon)$.]

Στην συνέχεια, για κάθε κατάσταση του K βρίσκουμε τις νέες μεταβάσεις για κάθε σύμβολο. Για την q_0 έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta'(q_0, 0) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_0), 0)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_0, q_1\}, 0)) \\ &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_0, 0)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 0)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 0)) = \text{cl}_\varepsilon(q_0) \cup \emptyset \cup \emptyset = \{q_0, q_1, q_2\} \\ \delta'(q_0, 1) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_0), 1)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 1)) \\ &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_0, 1)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 1)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 1)) = \emptyset \cup \text{cl}_\varepsilon(q_1) \cup \emptyset = \{q_1, q_2\} \\ \delta'(q_0, 2) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_0), 2)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 2)) \\ &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_0, 2)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 2)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 2)) = \emptyset \cup \emptyset \cup \text{cl}_\varepsilon(q_2) = \{q_2\}. \end{aligned}$$

Για την q_1 έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta'(q_1, 0) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_1), 0)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_1, q_2\}, 0)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 0)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 0)) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ \delta'(q_1, 1) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_1), 1)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_1, q_2\}, 1)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 1)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 1)) \\ &= \emptyset \cup \text{cl}_\varepsilon(q_1) \cup \emptyset = \{q_1, q_2\} \\ \delta'(q_1, 2) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_1), 2)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_1, q_2\}, 2)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 2)) \cup \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 2)) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \text{cl}_\varepsilon(q_2) = \{q_2\}. \end{aligned}$$

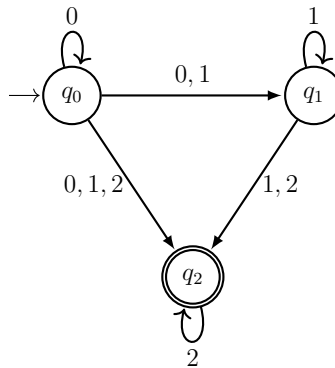
Για την q_2 έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta'(q_2, 0) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_2), 0)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_2\}, 0)) = \emptyset \\ \delta'(q_2, 1) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_2), 1)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_2\}, 1)) = \emptyset \\ \delta'(q_2, 2) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_2), 2)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_2\}, 2)) = \text{cl}_\varepsilon(q_2) = \{q_2\}. \end{aligned}$$

Άρα προκύπτει ο πίνακας

	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Επομένως, το ισοδύναμο NFA θα έχει την μορφή,



□