

HY-280 Θεωρία Υπολογισμού

Φροντιστήριο 1

26/09/2025

Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$2^n > n^3, \quad n \geq 10$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε **μαθηματική επαγωγή** ώστε να αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 10$, η ανισότητα $2^n > n^3$ ισχύει.

Αρχικό βήμα: Για $n = 10$, θα δείξουμε ότι $2^{10} > 10^3 \Rightarrow 2^{10} = 1024, \quad 10^3 = 1000$. Εφόσον, $1024 > 1000$, η ανισότητα ισχύει για $n = 10$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για $n = k \geq 10$, δηλαδή $2^k > k^3$.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή $2^{k+1} > (k + 1)^3$.

Επαγωγικό βήμα: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$.

Από επαγωγική υπόθεση παίρνουμε: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^3$.

Τώρα θα δείξουμε ότι: $2 \cdot k^3 > (k + 1)^3$.

Πρώτα αναπτύσσουμε το $(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$. Τότε, $2k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \Rightarrow 2k^3 - k^3 > 3k^2 + 3k + 1 \Rightarrow k^3 > 3k^2 + 3k + 1$ (1).

Για $k = 10$, από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε: $k^3 - 3k^2 - 3k - 1 = 669 > 0$.

Εφόσον $669 > 0$, η (1) ισχύει για $k = 10$. Καθώς το $k > 10$ και αυξάνεται, η συνάρτηση $k^3 - 3k^2 - 3k - 1$ είναι αύξουσα, συνεπώς η (1) ισχύει για όλα τα $k \geq 10$. $\square$

Άσκηση 2. Να αποδείξετε ότι το $[0, 1]$ είναι μη αριθμήσιμο.

Λύση. Έστω ότι το $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση f (δηλ, 1-1 και επί) η οποία απεικονίζει το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ στο $[0, 1]$ (δηλαδή,

ένα στοιχείο του $\mathbb{N}$ με ένα στοιχείο στο $[0, 1]$). [Επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη μπορούμε να δουλέψουμε και με την απεικόνιση από το $[0, 1]$ στους $\mathbb{N}$].

Άρα, μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε φυσικό αριθμό σε έναν ξεχωριστό δεκαδικό αριθμό, π.χ.

$$1 \rightarrow 0.314519 \dots$$

$$2 \rightarrow 0.111111 \dots$$

$$3 \rightarrow 0.000000 \dots$$

$$\vdots$$

Αν γράψουμε την απεικόνιση αυτή στην πλήρη της γενικότητα, θα είναι:

$$1 \rightarrow 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4} \dots a_{1,k} \dots$$

$$2 \rightarrow 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4} \dots a_{2,k} \dots$$

$$3 \rightarrow 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4} \dots a_{3,k} \dots$$

$$\vdots$$

$$k \rightarrow 0.a_{k,1}a_{k,2}a_{k,3}a_{k,4} \dots a_{k,k} \dots$$

$$\vdots$$

όπου τα a είναι αριθμοί μεταξύ του 0 και του 9. Χωρίς βλάβης της γενικότητας υποθέτουμε ότι όλοι οι δεκαδικοί έχουν το ίδιο, οσοδήποτε μεγάλο, μήκος (π.χ. ο 0.5 αναπαριστάται ως 0.500...).

Προσέξτε ότι η προηγούμενη απεικόνιση ‘χρησιμοποιεί’ όλα τα στοιχεία του $\mathbb{N}$. Συνεπώς, αν βρω έναν δεκαδικό x που δεν λαμβάνει μέρος στην προηγούμενη απεικόνιση, τότε το $[0, 1]$ θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το σύνολο $\mathbb{N}$.

Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε τον δεκαδικό αριθμό x που δεν λαμβάνει μέρος στην προηγούμενη απεικόνιση. Θα το κάνουμε ως εξής:

το πρώτο στοιχείο του x , x_1 , θα διαφέρει από το 1ο στοιχείο του πρώτου δεκαδικού της απεικόνισης $0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4} \dots a_{1,k} \dots$, δηλαδή στο $x_1 \neq a_{1,1}$.

το δεύτερο στοιχείο του x , x_2 , θα διαφέρει από το 2ο στοιχείο του δεύτερου δεκαδικού της απεικόνισης $0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4} \dots a_{2,k} \dots$, δηλαδή στο $x_2 \neq a_{2,2}$.

$$\vdots$$

το k στοιχείο του x , x_k , θα διαφέρει από το k -οστό στοιχείο του k -οστού δεκαδικού της απεικόνισης $0.a_{k,1}a_{k,2}a_{k,3}a_{k,4} \dots a_{k,k} \dots$, δηλαδή στο $x_k \neq a_{k,k}$.

$$\vdots$$

Αν την δούμε οπτικά, η παραπάνω διαδικασία έχει την μορφή,

$$1 \rightarrow 0.\textcolor{red}{a}_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4} \dots a_{1,k} \dots$$

$$2 \rightarrow 0.a_{2,1}\textcolor{red}{a}_{2,2}a_{2,3}a_{2,4} \dots a_{2,k} \dots$$

$$3 \rightarrow 0.a_{3,1}a_{3,2}\textcolor{red}{a}_{3,3}a_{3,4} \dots a_{3,k} \dots$$

$$\vdots$$

$$k \rightarrow 0.a_{k,1}a_{k,2}a_{k,3}a_{k,4} \dots \textcolor{red}{a}_{k,k} \dots$$

$$\vdots$$

$$x \quad 0.\textcolor{blue}{x}_1 \textcolor{blue}{x}_2 \textcolor{blue}{x}_3 \textcolor{blue}{x}_4 \dots \textcolor{blue}{x}_k \dots$$

Εκ κατασκευής, ο x διαφέρει από όλους τους δεκαδικούς που απεικονίζονται στο $\mathbb{N}$, άρα ο x δεν λαμβάνει μέρος στην απεικόνιση. Συνεπώς, το $[0, 1]$ είναι μεγαλύτερο από το $\mathbb{N}$. Καταλήξαμε δηλαδή ότι το $[0, 1]$ είναι μη-αριθμήσιμο. $\square$

Άσκηση 3. Δίνονται δύο συμβολοσειρές w, u πάνω στο αλφάβητο Σ . Να αποδείξετε ότι $(w \circ u)^R = u^R \circ w^R$, όπου a^R σημαίνει την αντιστροφή της συμβολοσειράς a .

Λύση. Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{a_1, b_1a_2, b_2, \dots, a_n, \dots b_m\}$ και οι συμβολοσειρές $w = a_1a_2 \dots a_n$ και $u = b_1b_2 \dots b_m$. Τότε, $w \circ u = a_1a_2 \dots a_nb_1b_2 \dots b_m$.

Αντιστρέφοντας τη συμβολοσειρά $w \circ u$, έχουμε:

$$(w \circ u)^R = (a_1a_2 \dots a_nb_1b_2 \dots b_m)^R = b_mb_{m-1} \dots b_1a_na_{n-1} \dots a_1$$

Από την άλλη, αντιστρέφοντας τις συμβολοσειρές w και u ξεχωριστά, έχουμε:

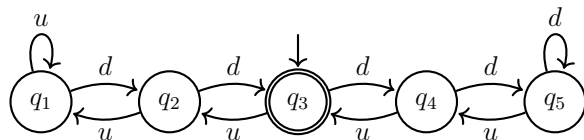
$$w^R = a_na_{n-1} \dots a_1 \quad \text{και} \quad u^R = b_mb_{m-1} \dots b_1$$

Τότε, ισχύει $u^R \circ w^R = b_mb_{m-1} \dots b_1a_na_{n-1} \dots a_1$ και καταλήγουμε στο ζητούμενο $(w \circ u)^R = u^R \circ w^R$. $\square$

Άσκηση 4. Έστω DFA M τ.ω. $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{u, d\}, \delta, q_3, \{q_3\})$, όπου η συνάρτηση μετάβασης δ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα. Δώστε το διάγραμμα καταστάσεων του M .

δ	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

Λύση.



□

Άσκηση 5. Δοθείσας της γλώσσας $A = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ έχει περιττό αριθμό από } 1\}$ σχεδιάστε ένα DFA που την αναγνωρίζει.

Λύση. [Πως δουλεύουμε

- Έλεγχος κάθε συμβόλου και αν το τμήμα της συμβολοσειράς που εξετάστηκε ανήκει ή όχι στη γλώσσα
- Καθορισμός πληροφοριών που πρέπει να θυμόμαστε:
 1. είτε ο αριθμός των 1 που διαβάσαμε είναι άρτιος,
 2. είτε ο αριθμός των 1 που διαβάσαμε είναι περιττός.
- Αποδίδουμε σε κάθε περίπτωση μια κατάσταση.

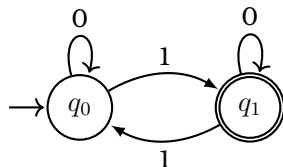
]

Καθορισμός Μεταβάσεων Με βάση το πώς πρέπει να μετακινηθούμε μετά την ανάγνωση ενός συμβόλου:

- Ανάγνωση 0: αριθμός των 1 δεν αλλάζει άρα μένουμε στην ίδια κατάσταση
- Ανάγνωση 1: αριθμός των 1 αλλάζει άρα αν είμαστε στο q_0 πάμε q_1 και ανάποδα

Καθορισμός εναρκτηρίας κατάστασης. Αντιστοιχεί στην περίπτωση της λέξης με μηδέν σύμβολα. Στην περίπτωση της A ορίζουμε το q_0 ως αρχική κατάσταση, το οποίο δεν μπορεί να είναι και τελική κατάσταση, εφόσον σε μηδέν σύμβολα το πλήθος των 1 είναι άρτιο. Παρατηρούμε ότι όπως επισκέπτεται την q_1 έχει προσπελάσει ακριβώς περιττού πλήθους 1, άρα η q_1 είναι τελική κατάσταση.

Καθορισμός Τελικών Καταστάσεων. Στην περίπτωση μας το DFA είναι

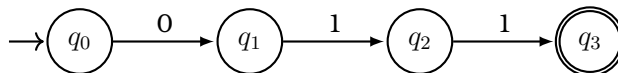


□

Άσκηση 6. Κατασκευάστε DFA για την γλώσσα στο $\Sigma = \{0, 1\}$,

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ξεκινάει και τελειώνει με } 011\}.$$

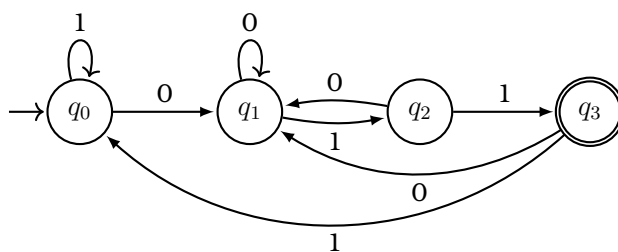
Λύση. Θα κατασκευάσουμε το DFA σταδιακά ξεκινώντας από το αυτόματο που αναγνωρίζει την μικρότερη, σε μήκος, συμβολοσειρά w που ανήκει στην L . Αυτή είναι η $w = 011$ και το αυτόματο που την αναγνωρίζει είναι το ακόλουθο.



Τώρα πρέπει να βρούμε τις υπόλοιπες μεταβάσεις (π.χ. από την q_0 με 1, από την q_1 με 0, κτλ).

- Στο q_0 , αν διαβάσουμε το 1, πρέπει να αναζητήσουμε ολόκληρο την υποσυμβολοσειρά 011.
- Στο q_1 , αν διαβάσουμε ξανά το 0, πρέπει απλώς να αναζητήσουμε το 11 για να τερματίσει.
- Στο q_2 , αν διαβάσουμε το 0, πρέπει να αναζητήσουμε ξανά το 11 για να τερματίσει.
- Στο q_3 , μπορεί να διαβάσουμε το 0 ή το 1.
 - Αν πάρουμε το 0, πρέπει να αναζητήσουμε το 11 για να τερματίσει.
 - Αν πάρουμε το 1, πρέπει να αναζητήσουμε ολόκληρο το μοτίβο 011 για να τερματίσει.

Συνεπώς, το αυτόματο θα έχει την μορφή.



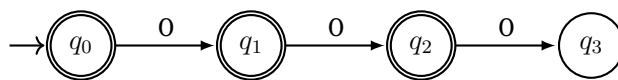
Προσέξτε ότι δεν χρειάστηκε να προσθέσουμε παραπάνω καταστάσεις από το αρχικό αυτόματο. □

Άσκηση 7. Κατασκευάστε DFA για την γλώσσα στο $\Sigma = \{0, 1\}$,

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ δεν έχει } 3 \text{ διαδοχικά } 0\}.$$

Λύση. Φυσικά η γλώσσα δεν έχει και τις συμβολοσειρές που έχουν παραπάνω από 3 συνεχόμενα 0, γιατί τότε θα είχε σίγουρα 3 συνεχόμενα 0.

Παρατηρούμε ότι η L αποτελείται τις συμβολοσειρές $\{\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 001, 1001, 100100, \dots\}$ και δεν αποδέχεται συμβολοσειρές από το σύνολο $\{000, 0001, 1000, 10001, \dots\}$. Αρχικά, προσπαθήσουμε να αναπαράξουμε την ιδιότητα της γλώσσας ως κομμάτι του αυτομάτου,



Αυτό το κομμάτι δέχεται τις συμβολοσειρές $\varepsilon, 0, 00$, αλλά όχι την 000.

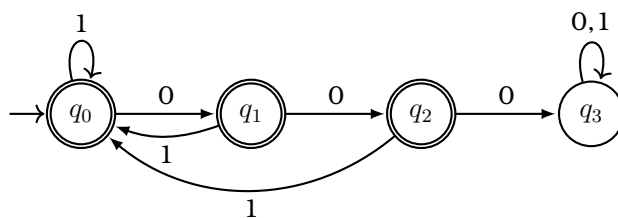
Το αυτόματο μπορεί

να ξεκινάει από οποιοδήποτε πλήθος 1, άρα βρόγχος στην q_0 με ετικέτα 1.

να αποδέχεται συμβολοσειρές με οσαδήποτε μεμονομένα 0 και οσοδήποτε πλήθος 1 (σίγουρα ένα) μεταξύ τους, στην αρχή και στο τέλος, άρα όταν διαβάσει 1 στην q_1 πάει στην q_0 .

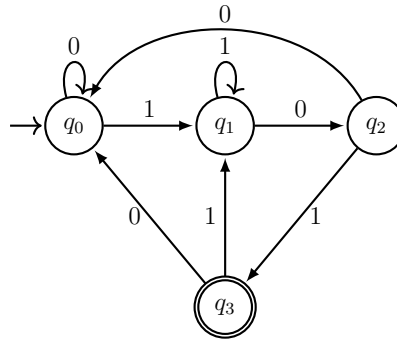
να αποδέχεται συμβολοσειρές με οσαδήποτε δυάδες 0 και οσοδήποτε πλήθος 1 (σίγουρα ένα) μεταξύ τους στην αρχή και στο τέλος, άρα όταν διαβάσει 1 στην q_2 πάει στην q_0 .

οποιαδήποτε συμβολοσειρά με άλλα χαρακτηριστικά εμφανιστεί δεν θα πρέπει να γίνεται αποδεκτή από το αυτόματο, άρα συμπληρώνουμε την αδιέξοδη κατάσταση με βρόγχο, ο οποίος έχει ετικέτα 0, 1



□

Άσκηση 8. Περιγράψτε τη γλώσσα που αποδέχεται το παρακάτω αυτόματο, στο αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$.



Λύση. Η γλώσσα που δέχεται ένα αυτόματο είναι το σύνολο των συμβολοσειρών που ορίζουν διαδρομές στο διάγραμμα καταστάσεων από την αρχική σε κάποια από τις τελικές καταστάσεις του αυτόματου.

Αρχικά, από το διάγραμμα καταστάσεων κατασκευάζουμε την συνάρτηση μετάβασης ως εξής:

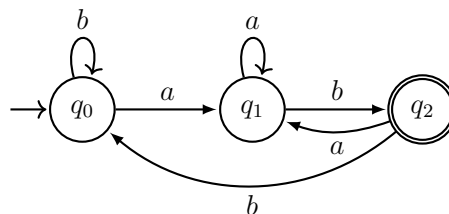
δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_0	q_3
q_3	q_0	q_1

Με οπισθοδρόμηση παρατηρούμε ότι, για να επισκεφθεί το αυτόματο στην τελική κατάσταση q_3 θα πρέπει να ακολουθήσει μετάβαση για 1 από την q_2 , στην οποία εισέρχεται ύστερα από μετάβαση για 0 από την q_1 , στην οποία με την σειρά του, εισέρχεται ύστερα από μετάβαση για 1 είτε από την q_0 , είτε από την q_1 , είτε από την q_3 . Άρα, κάθε συμβολοσειρά που ορίζει διαδρομή από την αρχική κατάσταση q_0 στην τελική q_3 , θα πρέπει να ολοκληρώνεται με την υποσυμβολοσειρά 101. Επομένως, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό της L :

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ τελειώνει με την υποσυμβολοσειρά } 101\}. \quad (1)$$

□

Άσκηση 9. Έστω η γλώσσα $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ τελειώνει σε } ab\}$ και το αυτόματο M του παρακάτω σχήματος, αποδέχεται την L , δηλαδή $L(M) = L$. Αποδείξτε ότι $(q_0, w) \vdash_M^* (q_3, \varepsilon)$, $\forall w \in L$.



Λύση. Το DFA έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- $K = \{q_0, q_1, q_2\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- q_0 είναι η αρχική κατάσταση,
- $F = \{q_2\}$ είναι η τελική κατάσταση,
- Η συνάρτηση μετάβασης δ είναι:

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_0

Απόδειξη για τη σχέση $\vdash_M^*$. Η γλώσσα L αποτελείται από όλες τις συμβολοσειρές που τελειώνουν με την υποσυμβολοσειρά ab . Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι κάθε λέξη στη γλώσσα μπορεί να παραχθεί από το DFA M μέσω της σχέσης $\vdash_M^*$.

Έστω οποιαδήποτε λέξη $w \in L$, δηλαδή $w = xab$ όπου το x είναι οποιαδήποτε συμβολοσειρά που αποτελείται από τα σύμβολα a και b , και η w τελειώνει σε ab . Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τέτοια λέξη w , έχουμε:

$$(q_0, w) \vdash_M^* (q_2, \epsilon)$$

δηλαδή, το αυτόματο M αποδέχεται τη λέξη w .

Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε κατάσταση του M , $p \in \{q_0, q_1, q_2\}$, ισχύει $\delta(p, a) = q_1$. Σε όρους υπολογισμού αυτό γράφεται, $(p, a) \vdash_M (q_1, \epsilon)$.

Επομένως, σε οποιαδήποτε κατάσταση και αν έχει καταλήξει ο υπολογισμός της υποσυμβολοσειράς xa , η αλληλουχία μεταβάσεων για είσοδο xa θα καταλήξει στην q_1 , τυπικά αυτό το γράφουμε ως $\delta(q_0, xa) = q_1$. Σε όρους υπολογισμού αυτό γράφεται, $(q_0, xa) \vdash_M^* (q_1, \epsilon)$.

Μένει να δείξουμε τι γίνεται όταν στην q_1 διαβάσουμε b . Από τον πίνακα μεταβάσεων έχουμε ότι μεταβαίνουμε στην q_2 , δηλαδή $\delta(q_1, b) = q_2$. Όμως, $q_1 = \delta(q_0, xa)$, αντικαθιστούμε στην σχέση $\delta(q_1, b) = q_2$ και παίρνουμε $\delta(\delta(q_0, xa), b) = q_2$, το οποίο είναι $\delta(q_0, xab) = q_2$. Άρα έχουμε, $(q_0, xab) \vdash_M^* (q_1, b) \vdash_M (q_2, \epsilon)$, συνεπώς ισχύει $(q_0, xab) \vdash_M^* (q_2, \epsilon)$.

Η q_2 είναι κατάσταση τερματισμού, άρα αποδείξαμε ότι για κάθε συμβολοσειρά $w \in L$, ισχύει $(q_0, w) \vdash_M^* (q_2, \epsilon)$. $\square$