
Πεπερασμένα Αυτόματα Finite Automata

Διάλεξη 8: Θεωρία Υπολογισμού · ΗΥ-280

Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

0. Κλειστότητα (Closure) - Υπενθύμιση από Διάλεξη 3

Τι σημαίνει «κλειστότητα»;

Ένα σύνολο S είναι **κλειστό ως προς μια πράξη** όταν η εφαρμογή της πράξης σε στοιχεία του S δίνει πάλι στοιχείο του S .

Τυπικός ορισμός

Για μια πράξη $\circ : S \times S \rightarrow U$, το S είναι κλειστό ως προς $\circ$ αν

$$\forall x, y \in S, \quad x \circ y \in S.$$

Η πράξη δεν μας βγάζει έξω από το σύνολο.

Παραδείγματα κλειστότητας

- $\mathbb{N}$ ως προς την πρόσθεση: $3 + 5 = 8 \in \mathbb{N}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b \in \mathbb{N}.$$

- $\mathbb{N}$ **όχι** ως προς την αφαίρεση: $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$.

- $\mathbb{Z}$ ως προς την αφαίρεση: $3 - 5 = -2 \in \mathbb{Z}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{Z}.$$

Τι είναι η κλειστότητα ενός συνόλου;

Αν το S δεν είναι κλειστό ως προς μια πράξη, μπορούμε να προσθέσουμε τα στοιχεία που **λείπουν**.

Κλειστότητα ως προς μια πράξη

Η **κλειστότητα** του S είναι το **μικρότερο υπερσύνολο** $C \supseteq S$ που είναι κλειστό ως προς την πράξη.

Παράδειγμα: Ξεκινώντας από $S = \{1\}$ και εφαρμόζοντας επανειλημμένα την πρόσθεση,

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4, \quad \dots$$

παίρνουμε $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Ανακλαστική κλειστότητα σχέσης

Έστω $R \subseteq A \times A$. Η **ανακλαστική κλειστότητα** είναι η μικρότερη ανακλαστική σχέση που περιέχει την R .

$$R = R \cup \Delta_A, \quad \Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}.$$

Παράδειγμα

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad R = \{(1, 2), (2, 2)\}.$$

$$R = R \cup \{(1, 1), (3, 3)\}.$$

Ιδέα: Προσθέτουμε ακριβώς τους βρόχους που λείπουν.

Συμμετρική κλειστότητα σχέσης

Στο $A \times A$ ορίζουμε τη μοναδιαία πράξη

$$(x, y) \longmapsto (y, x).$$

Η συμμετρική κλειστότητα είναι η μικρότερη σχέση που περιέχει την R και είναι κλειστή ως προς αυτή την πράξη.

$$R = R \cup R^{-1}.$$

Παράδειγμα

$$R = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

$$R = R \cup \{(2, 1), (3, 2)\}.$$

Μεταβατική κλειστότητα σχέσης

Στο $A \times A$ ορίζουμε τη **μερική δυαδική πράξη**

$$(x, y), (y, z) \longmapsto (x, z).$$

Η μεταβατική κλειστότητα R^+ είναι η μικρότερη σχέση που περιέχει την R και είναι κλειστή ως προς αυτή την πράξη.

Παράδειγμα

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}.$$

$$R^+ = R \cup \{(1, 3), (2, 4), (1, 4)\}.$$

Προσοχή: Τα νέα ζεύγη μπορεί να επιβάλλουν και άλλα νέα ζεύγη!

Από τις σχέσεις στα κατευθυνόμενα γραφήματα

Μια σχέση $R \subseteq V \times V$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως **κατευθυνόμενο γράφημα** $G = (V, R)$. Το $(u, v) \in R$ σημαίνει ότι μπορούμε να μεταβούμε από το u στο v σε ένα βήμα.



Διαδρομή μήκους k

Ακολουθία $v_0, v_1, \dots, v_k$ με $(v_i, v_{i+1}) \in R$ για $0 \leq i < k$.

- Επιτρέπονται επαναλήψεις: a, b, c, b, c, d έχει μήκος 5.
- Διαδρομή μήκους 0: μία μόνο κορυφή.
- Από το a είναι προσπελάσιμες οι a, b, c, d , αλλά όχι η e .

Από τις διαδρομές στη μεταβατική κλειστότητα

Έστω $R \subseteq V \times V$. Ορίζουμε τις δυνάμεις της σχέσης:

$$R^0 = I_V = \{(v, v) : v \in V\}, \quad R^1 = R.$$

$$(u, w) \in R^{k+1} \iff \exists v \in V : (u, v) \in R^k \wedge (v, w) \in R.$$

Ερμηνεία

$(u, v) \in R^k$ αν και μόνο αν υπάρχει διαδρομή από το u στο v μήκους **ακριβώς** k .

$$R^+ = \bigcup_{k \geq 1} R^k$$

$$R^* = \bigcup_{k \geq 0} R^k = I_V \cup R^+$$

- R^+ : **μεταβατική κλειστότητα** — ένα ή περισσότερα βήματα.
- R^* : **ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα** — μηδέν ή περισσότερα βήματα.

Γιατί το R^+ δεν είναι απαραίτητα ανακλαστικό;



- Ο κύκλος $b \rightarrow c \rightarrow b$ δίνει $(b, b) \in R^2 \subseteq R^+$.
- Αντίστοιχα, $(c, c) \in R^2 \subseteq R^+$.
- Όμως $(a, a) \notin R^+$ και $(e, e) \notin R^+$: δεν υπάρχει διαδρομή θετικού μήκους που επιστρέφει σε αυτές τις κορυφές.

Συμπέρασμα

Το R^+ προσθέτει ζεύγη που συνδέονται με διαδρομές **θετικού** μήκους. Το R^* περιλαμβάνει **πάντα** και όλα τα (v, v) .

Υπολογισμός προσπελασιμότητας από μία κορυφή



$$S_0 = \{a\}, \quad \text{Post}_R(S) = \{v : \exists u \in S, (u, v) \in R\}, \quad S_{i+1} = S_i \cup \text{Post}_R(S_i).$$

Γύρος	Σύνολο	Νέες κορυφές
0	$S_0 = \{a\}$	αρχική κορυφή
1	$S_1 = \{a, b\}$	b
2	$S_2 = \{a, b, c\}$	c
3	$S_3 = \{a, b, c, d\}$	d
4	$S_4 = S_3$	καμία

Σταματάμε όταν $S_{i+1} = S_i$. Εδώ βρίσκουμε τις προσπελάσιμες κορυφές από το a , όχι όλη τη σχέση R^+ .

1. Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα αυτόματα (DFAs)

DFA: ο τυπικός ορισμός

Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο

Ένα DFA είναι μία πεντάδα $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$, όπου:

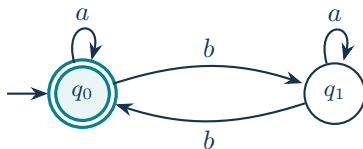
- K : πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων,
- Σ : πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου,
- $s \in K$: αρχική κατάσταση, $F \subseteq K$: καταστάσεις αποδοχής,
- $\delta : K \times \Sigma \longrightarrow K$ συνάρτηση μετάβασης.

Για **κάθε** κατάσταση q και σύμβολο a υπάρχει **ακριβώς μία** επόμενη κατάσταση $\delta(q, a)$. Χρησιμοποιούμε K, s, F όπως στο απόσπασμα του βιβλίου. Το ε είναι η κενή συμβολοσειρά, όχι γράμμα του Σ .

Η συνάρτηση μετάβασης ως πίνακας και ως γράφος

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

$$s = q_0, \quad F = \{q_0\}.$$



Βέλος από έξω: **αρχική** κατάσταση. Διπλός κύκλος: **κατάσταση αποδοχής**.

$$q \xrightarrow{a} p \iff \delta(q, a) = p.$$

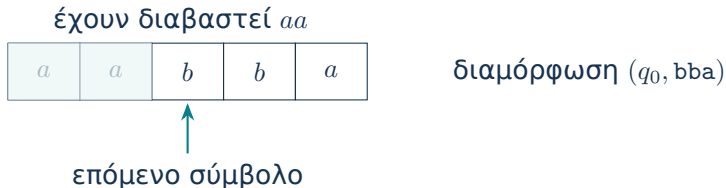
Προσοχή

Από κάθε κατάσταση πρέπει να ορίζεται μετάβαση για κάθε σύμβολο. Ετικέτα a, b συντομογραφεί δύο μεταβάσεις.

Διαμόρφωση (configuration)

Διαμόρφωση $\equiv$ Πού είμαστε και τι απομένει;

Μια **διαμόρφωση** του DFA M είναι ζεύγος $(q, w) \in K \times \Sigma^*$: q η τρέχουσα κατάσταση, w το **μη αναγνωσμένο** υπόλοιπο.



Η κατάσταση συνοψίζει ό,τι κρατά η μηχανή από το παρελθόν. Δεν επιστρέφουμε σε προηγούμενα σύμβολα.

Συγκρατούμε τα εξής:

Οι **καταστάσεις** είναι πεπερασμένες. Το σύνολο όλων των δυνατών διαμορφώσεων $K \times \Sigma^*$ όμως είναι άπειρο.

Ένα βήμα στο αυτόματο

Ορισμός της $\vdash_M$

Για $q, p \in K$, $a \in \Sigma$ και $u \in \Sigma^*$:

$$(q, au) \vdash_M (p, u) \iff \delta(q, a) = p.$$

Ένα βήμα **καταναλώνει ακριβώς ένα σύμβολο** και ενημερώνει την κατάσταση.

$$(q_0, \text{bba}) \vdash_M (q_1, \text{ba}) \vdash_M (q_0, \text{a}).$$

Από κάθε (q, w) με $w \neq \varepsilon$ υπάρχει μία επόμενη διαμόρφωση. Από την (q, ε) δεν υπάρχει άλλο βήμα DFA.

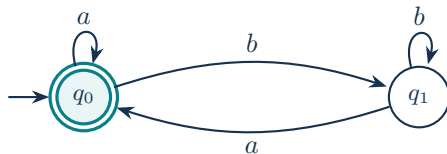
Συγκρατούμε τα εξής:

Σε είσοδο μήκους m , το DFA εκτελεί ακριβώς m βήματα. Δεν σταματά επειδή επισκέφθηκε μια κατάσταση αποδοχής.

Ένα συγκεκριμένο DFA και η είσοδος bba

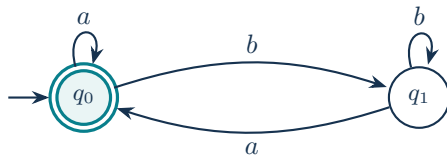
Το αυτόματο

$K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $s = q_0$, $F = \{q_0\}$. Διαβάζοντας a πηγαίνει στο q_0 , διαβάζοντας b πηγαίνει στο q_1 .



δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_1

Αρχική διαμόρφωση: δεν έχουμε διαβάσει τίποτα



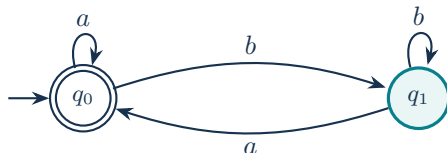
Είσοδος: bba (όλη αδιάβαστη)

Αρχική διαμόρφωση

(q_0, bba)

Το q_0 είναι η τρέχουσα κατάσταση· το bba είναι το αδιάβαστο υπόλοιπο.

Βήμα 1: διαβάζουμε b

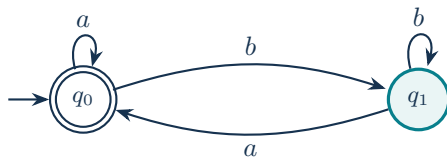


$$\delta(q_0, b) = q_1$$

$$(q_0, \underbrace{b}_{\text{διαβάζεται}} \text{ ba}) \vdash_M (q_1, \text{ba})$$

Τι άλλαξε;

Καταναλώθηκε ένα σύμβολο και απομένει η συμβολοσειρά ba .

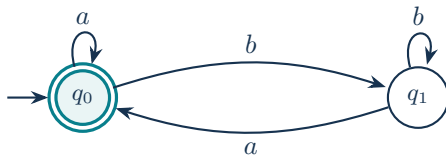
Βήμα 2: διαβάζουμε ξανά b 

$$\delta(q_1, b) = q_1$$

$$(q_1, \underbrace{b}_{\text{διαβάζεται}} a) \vdash_M (q_1, a)$$

Παρατήρηση

Μια μετάβαση μπορεί να αφήσει την κατάσταση αμετάβλητη. Η είσοδος όμως μικραίνει κατά ένα σύμβολο.

Βήμα 3: διαβάζουμε a 

$$\delta(q_1, a) = q_0$$

$$(q_1, \underbrace{a}_{\text{διαβάζεται}}) \vdash_M (q_0, \varepsilon)$$

Τερματισμός

Δεν απομένει άλλο σύμβολο. Εφόσον $q_0 \in F$, η είσοδος bba γίνεται αποδεκτή.

Άλλες δύο εκτελέσεις: αποδοχή vs. απόρριψη

Είσοδος aabba

$$\begin{aligned}
 (q_0, \text{aabba}) &\vdash_M (q_0, \text{abba}) \\
 &\vdash_M (q_0, \text{bba}) \\
 &\vdash_M (q_1, \text{ba}) \\
 &\vdash_M (q_0, \text{a}) \\
 &\vdash_M (q_0, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Αποδοχή: $q_0 \in F$.

Είσοδος abbab

$$\begin{aligned}
 (q_0, \text{abbab}) &\vdash_M (q_0, \text{bbab}) \\
 &\vdash_M (q_1, \text{bab}) \\
 &\vdash_M (q_0, \text{ab}) \\
 &\vdash_M (q_0, \text{b}) \\
 &\vdash_M (q_1, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Απόρριψη: $q_1 \notin F$.

Συγκρατούμε τα εξής:

Στη δεξιά εκτέλεση επισκεφθήκαμε το q_0 αρκετές φορές. Μετρά η κατάσταση **μετά το τελευταίο σύμβολο**.

Ανακλαστική-μεταβατική κλειστότητα

Μηδέν ή περισσότερα βήματα

Γράφουμε $C \vdash_M^* D$ αν υπάρχουν $t \geq 0$ και διαμορφώσεις $C = C_0, C_1, \dots, C_t = D$ με $C_j \vdash_M C_{j+1}$ για $0 \leq j < t$.

Ανακλαστικότητα

$C \vdash_M^* C$: επιτρέπουμε $t = 0$.

Μεταβατικότητα

$C \vdash_M^* D$ και $D \vdash_M^* E$ δίνουν $C \vdash_M^* E$.

Παράδειγμα

$(q_0, \text{bba}) \vdash_M^* (q_0, \text{a})$. Αυτό **δεν** είναι ακόμη αποδοχή: απομένει το σύμβολο a .

Προσοχή

Το «*» αφορά εδώ **κλειστότητα σχέσης**, όχι επανάληψη συμβολοσειράς.

Ολόκληρος ο πρώτος υπολογισμός ξανά

$$\begin{aligned}(q_0, \text{bba}) &\vdash_M (q_1, \text{ba}) \\ &\vdash_M (q_1, \text{a}) \\ &\vdash_M (q_0, \varepsilon).\end{aligned}$$

Ανακλαστική-μεταβατική κλειστότητα

$$(q_0, \text{bba}) \vdash_M^* (q_0, \varepsilon), \quad q_0 \in F.$$

Άρα bba γίνεται αποδεκτό από το αυτόματο .

Η γλώσσα που αναγνωρίζει ένα DFA

Έστω ένα DFA $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$.

Ορισμός: Η γλώσσα $L(M)$

Η **γλώσσα που αναγνωρίζει** (ή αποδέχεται) το αυτόματο M είναι

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \exists q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)\}.$$

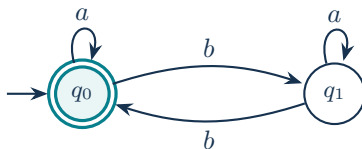
Με άλλα λόγια:

- Ξεκινάμε από την αρχική διαμόρφωση (s, w) .
- Διαβάζουμε **ολόκληρη** τη συμβολοσειρά w .
- Η w γίνεται αποδεκτή αν η τελική κατάσταση ανήκει στο F . Στο προηγούμενο παράδειγμα $bba \in L(M)$

Προσοχή

Πρέπει να βρισκόμαστε σε κατάσταση αποδοχής **αφού καταναλώσουμε όλη την είσοδο**.

Τι θυμάται το αυτόματο των δύο καταστάσεων;



q_0 : άρτιο πλήθος b

Παρατηρείστε πως η αρχική κατάσταση είναι και τελική αφού στην αρχή έχουμε δει 0 b και το 0 είναι άρτιος. Δεν θυμόμαστε πόσα b είδαμε αλλά ότι έχουμε δει άρτιο πλήθος.

q_1 : περιττό πλήθος b

Δεν θυμόμαστε πόσα b είδαμε αλλά ότι έχουμε δει περιττό πλήθος.

$$L(M) = \{w \in \{a, b\}^* : \#_b(w) \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

Δύο κανονικές εκφράσεις, η ίδια γλώσσα!

Είδαμε την προηγούμενη φορά μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα των συμβολοσειρών με **άρτιο πλήθος εμφανίσεων του b** .

Η προηγούμενη έκφραση:

$$r_1 = a^*(ba^*ba^*)^*$$

Μια εναλλακτική έκφραση:

$$r_2 = a^*(ba^*b)^*a^*$$

Στο φροντιστήριο

Θα δείτε γιατί οι δύο εκφράσεις είναι ισοδύναμες: $L(r_1) = L(r_2)$.

Θεώρημα του Kleene

Μια γλώσσα περιγράφεται από **κανονική έκφραση** αν και μόνο αν αναγνωρίζεται από **ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (DFA)**.

Πάμε τώρα στην απόδειξη της ορθότητας

σημειογραφία (notation) $\#_b(u)$ είναι το πλήθος των b μέσα στη συμβολοσειρά u .

Αναλλοίωτη ιδιότητα

Για κάθε πρόθεμα u , μετά την ανάγνωσή του βρισκόμαστε στην κατάσταση q_r , όπου $r = \#_b(u) \bmod 2$.

Βάση: $u = \varepsilon$. Είμαστε στο q_0 και $\#_b(\varepsilon) = 0$.

Επαγωγικό βήμα: υποθέτουμε τον ισχυρισμό για το u .

- Αν προστεθεί a στο u , δεν αλλάζει ούτε η ισοτιμία ούτε η κατάσταση.
- Αν προστεθεί b στο u , η ισοτιμία αλλάζει και η μετάβαση εναλλάσσει q_0, q_1 .

Άρα ο ισχυρισμός ισχύει για ua και ub . Στο τέλος, $q_0 \in F$ ακριβώς όταν το πλήθος b είναι άρτιο. □

Συγκρατούμε τα εξής:

Αποδεικνύουμε τι σημαίνει η κατάσταση **για κάθε πρόθεμα**.

Η επεκτεταμένη συνάρτηση μετάβασης

Από ένα σύμβολο σε ολόκληρη συμβολοσειρά

Ορίζουμε $\delta^* : K \times \Sigma^* \rightarrow K$ αναδρομικά:

$$\delta^*(q, \varepsilon) = q, \quad \delta^*(q, ua) = \delta(\delta^*(q, u), a), \quad a \in \Sigma.$$

Παράδειγμα:

$$\delta^*(q_0, \text{bba}) = \delta(\delta^*(q_0, \text{bb}), a) = \delta(q_0, a) = q_0.$$

Οι δύο συμβολισμοί περιγράφουν την ίδια εκτέλεση:

$$(q, w) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \iff \delta^*(q, w) = p.$$

Συγκρατούμε τα εξής:

$w \in L(M) \iff \delta^*(s, w) \in F$. Η δ^* είναι **συνάρτηση**, ενώ η $\vdash_M^*$ είναι **σχέση σε διαμορφώσεις**.

Διαβάζουμε πρώτα το u και μετά το v

Λήμμα συνένωσης

Για κάθε $q \in K$ και $u, v \in \Sigma^*$:

$$\delta^*(q, uv) = \delta^*(\delta^*(q, u), v).$$

Απόδειξη. Επαγωγή στο $|v|$, για αυθαίρετα αλλά σταθερά q, u .

$$v = \varepsilon : \quad \delta^*(q, u\varepsilon) = \delta^*(q, u).$$

Αν ισχύει για v , τότε για κάθε $a \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} \delta^*(q, uva) &= \delta(\delta^*(q, uv), a) \\ &= \delta(\delta^*(\delta^*(q, u), v), a) = \delta^*(\delta^*(q, u), va). \quad \square \end{aligned}$$

Άρα και $\delta^*(q, au) = \delta^*(\delta(q, a), u)$: η μορφή αναδρομής των αρχικών διαφανειών.

2 · Μη Ντετερμινιστικά Αυτόματα (NFAs)

Από το DFA στο NFA: τι αλλάζει;

DFA: μία επόμενη κατάσταση

$\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$. Για κάθε (q, a) υπάρχει **ακριβώς μία** επόμενη κατάσταση.

NFA: πολλές ή καμία επιλογή

$\Delta \subseteq K \times \Sigma \times K$. Μπορεί να υπάρχουν **πολλές, μία ή καμία** μεταβάσεις με το ίδιο σύμβολο.

Διάκριση

Το «μη ντετερμινιστικό» αφορά τις δυνατές επιλογές μετάβασης.

Τυπικός ορισμός NFA (χωρίς ϵ)

Ορισμός

Ένα NFA είναι πεντάδα $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$, όπου

- K είναι πεπερασμένο, μη κενό σύνολο καταστάσεων,
- Σ είναι πεπερασμένο αλφάβητο,
- $\Delta \subseteq K \times \Sigma \times K$ είναι η **σχέση μετάβασης**,
- $s \in K$ είναι η αρχική κατάσταση,
- $F \subseteq K$ είναι το σύνολο καταστάσεων αποδοχής.

$$(q, a, p) \in \Delta \iff \text{επιτρέπεται μετάβαση } q \xrightarrow{a} p.$$

Ισοδύναμη περιγραφή: $\delta_N(q, a) = \{p : (q, a, p) \in \Delta\} \in 2^K$.

Διαμορφώσεις και ένα βήμα NFA

Διαμόρφωση

$(q, w) \in K \times \Sigma^*$: τρέχουσα κατάσταση q και **μη αναγνωσμένη** είσοδος w .

Σχέση ενός βήματος

Για $a \in \Sigma$ και $u \in \Sigma^*$:

$$(q, au) \vdash_M (p, u) \iff (q, a, p) \in \Delta.$$

Από την ίδια διαμόρφωση μπορεί να υπάρχουν πολλοί διάδοχοι ή κανένας.

Προσοχή

Μια εκτέλεση που «κολλάει» πριν διαβαστεί όλη η είσοδος **δεν αποδέχεται** τη λέξη.

Πότε αποδέχεται ένα NFA;

Η $\vdash_M^*$ είναι η **ανακλαστική-μεταβατική κλειστότητα** της $\vdash_M$.

Ορισμός γλώσσας

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \exists f \in F, (s, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon)\}.$$

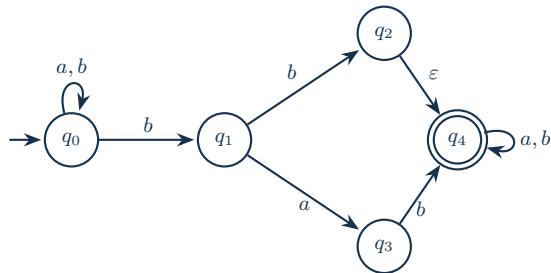
- Μια λέξη **γίνεται αποδεκτή** αν υπάρχει τουλάχιστον **μία** εκτέλεση που καταναλώνει όλη την είσοδο και καταλήγει σε F .
- **Απορρίπτεται** αν **καμία** εκτέλεση δεν πετυχαίνει αυτόν τον στόχο.

Κρίσιμη ιδέα

Μία αποδεκτή εκτέλεση αρκεί, ακόμη και αν άλλες απορρίπτουν.

Παράδειγμα: λέξεις που περιέχουν bb ή bab

$\Sigma = \{a, b\}$ και $L = \{w : \text{το } w \text{ περιέχει } bb \text{ ή } bab\}$.



Πού βρίσκεται ο μη ντετερμινισμός;

Στο q_0 με σύμβολο b : μπορούμε να μείνουμε στο q_0 ή να πάμε στο q_1 . Η ϵ -ακμή εδώ κάνει το σχήμα **ϵ -NFA**· σε λίγο θα δώσουμε τον τυπικό ορισμό του.

Η ίδια λέξη, δύο διαφορετικές εκτελέσεις

Θεωρούμε $w = \text{bab}$ στο προηγούμενο ε-NFA.

Εκτέλεση A: απορρίπτει

$$(q_0, \text{bab}) \vdash_M (q_0, \text{ab}) \vdash_M (q_0, \text{b}) \vdash_M (q_0, \varepsilon).$$

Καταναλώθηκε όλη η είσοδος, αλλά $q_0 \notin F$.

Εκτέλεση B: αποδέχεται

$$(q_0, \text{bab}) \vdash_M (q_1, \text{ab}) \vdash_M (q_3, \text{b}) \vdash_M (q_4, \varepsilon).$$

Καταναλώθηκε όλη η είσοδος και $q_4 \in F$.

Συμπέρασμα

$\text{bab} \in L(M)$, επειδή **υπάρχει** η εκτέλεση B. Η εκτέλεση A δεν αναιρεί την αποδοχή.

Τυπικός ορισμός ε -NFA

Ορισμός

Ένα ε -NFA είναι πεντάδα $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$, με τα ίδια K, Σ, s, F όπως πριν, αλλά

$$\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K.$$

Μια μετάβαση $(q, \varepsilon, p) \in \Delta$ αλλάζει κατάσταση **χωρίς να διαβάσει σύμβολο**.

Σχέση ενός βήματος

Για $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ και $w = xu$:

$$(q, w) \vdash_M (p, u) \iff (q, x, p) \in \Delta.$$

Ειδικά: $(q, u) \vdash_M (p, u)$ όταν $(q, \varepsilon, p) \in \Delta$.

NFA έναντι ϵ -NFA

	NFA	ϵ -NFA
Μεταβάσεις	$\Delta \subseteq K \times \Sigma \times K$	$\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times K$
Ένα βήμα	καταναλώνει 1 σύμβολο	καταναλώνει 0 ή 1 σύμβολο
Αποδοχή	υπάρχει επιτυχής εκτέλεση	υπάρχει επιτυχής εκτέλεση
Ισχύς	κανονικές γλώσσες	κανονικές γλώσσες

Σημαντικό

Οι ϵ -μεταβάσεις δεν αυξάνουν την εκφραστική ισχύ: κάθε ϵ -NFA έχει ισοδύναμο NFA χωρίς ϵ -μεταβάσεις και ισοδύναμο DFA.

Απουσιάζει τουλάχιστον ένα σύμβολο

Για $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$, θεωρούμε

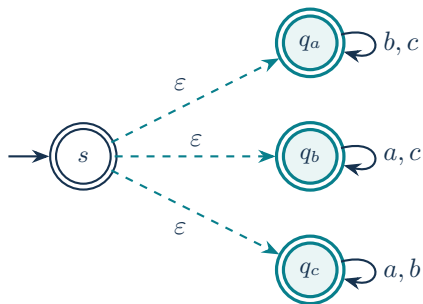
$$L_{\text{miss}} = \{w \in \Sigma^* : \exists i, a_i \text{ δεν εμφανίζεται στο } w\}.$$

$\Sigma = \{a, b, c\}$	Ανήκει;	Ποιο σύμβολο απουσιάζει;
ε	ναι	και τα τρία
baba	ναι	το c
cccc	ναι	τα a, b
abca	όχι	κανένα

Η ιδέα

Το NFA επιλέγει ένα υποψήφιο σύμβολο που **υποστηρίζει ότι απουσιάζει** και ελέγχει αυτή την υπόθεση μέχρι το τέλος.

Η κατασκευή: ένας κλάδος για κάθε πιθανή απουσία



Για γενικό n :

$$K = \{s, q_1, \dots, q_n\}, \quad F = K.$$

Προσθέτουμε ακριβώς:

$$(s, \varepsilon, q_i) \in \Delta \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$(q_i, a_j, q_i) \in \Delta \quad (j \neq i).$$

Στο q_i **δεν υπάρχει** μετάβαση με το a_i .

Σχεδιάζουμε και το s ως αποδεκτό, σύμφωνα με το $F = K$ του κειμένου. Η αποδοχή του ε θα ίσχυε και χωρίς αυτό, μέσω των ε -ακμών.

Προετοιμασία για την Πρόοδο -- HY-280

Τι είναι εξεταστέο;

Όλη η ύλη που καλύψαμε **μέχρι και σήμερα** είναι εξεταστέα.

Την επόμενη εβδομάδα

- Θα λύσουμε **αρκετές ασκήσεις** στις διαλέξεις για την προετοιμασία σας.
- Το λήμμα άντλησης και η ελαχιστοποίηση καταστάσεων που θα δούμε από βδομάδα δεν θα εξεταστούν στην πρόοδο.

Έχετε απορίες; Ρωτήστε στο forum ή ελάτε στις ώρες γραφείου! Καλή προετοιμασία και καλή επιτυχία!