

Βασικά μαθηματικά εργαλεία

Διάλεξη 3: Θεωρία Υπολογισμού · ΗΥ-280

Χαράλαμπος Ε. Τσουρακάκης

Μαθηματικό Υπόβαθρο για το HY280

Σύνολα, Λογική και Αποδεικτικές τεχνικές - μια ταχύρρυθμη εισαγωγή.

Σύμβαση: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Όπου χρειάζεται $n > 0$, το δηλώνουμε.

- Θα κάνουμε μια ανασκόπηση εννοιών και τεχνικών που γνωρίζετε συν κάποιες νέες τεχνικές (πχ. dovetailing).
- **Επανάληψη υλικού:** Συστήνω το βιβλίο Διακριτά Μαθηματικά του Κολουντζάκη-Παπαχριστόπουλου (Ελληνικά) ή το Book of Proof του Hammock (English).
- Ο μόνος τρόπος να μάθετε τις τεχνικές είναι να εξασκηθείτε.

Στοιχεία, σύνολα και υποσύνολα

Ένα **σύνολο** είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων.

$$Q = \{p, q, r\}, \quad S = \{p, r\}, \quad p \in S, \quad q \notin S.$$

Δεδομένων δύο συνόλων S, Q , το S είναι υποσύνολο του Q :

$$S \subseteq Q \iff \forall x (x \in S \Rightarrow x \in Q).$$

- Η σειρά και οι επαναλήψεις δεν αλλάζουν ένα σύνολο: $\{p, r, p\} = \{r, p\}$.
- Το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία. Ισχύει $\emptyset \subseteq Q$ για κάθε Q .
- $|Q| = 3$: το **πλήθος** των στοιχείων του Q .

Διαφορετικοί τύποι αντικειμένων: p είναι κατάσταση, ενώ $\{p\}$ είναι σύνολο καταστάσεων.

Πράξεις συνόλων και λογική

Για $A = \{p, q\}$, $B = \{q, r\}$ και σύμπαν $Q = \{p, q, r, s\}$:

Πράξη	Συνθήκη για το x	Παράδειγμα
$A \cup B$	$x \in A \vee x \in B$	$\{p, q, r\}$
$A \cap B$	$x \in A \wedge x \in B$	$\{q\}$
$A \setminus B$	$x \in A \wedge x \notin B$	$\{p\}$
$Q \setminus A$	$x \in Q \wedge x \notin A$	$\{r, s\}$

Το συμπλήρωμα εξαρτάται από το **σύμπαν** που έχουμε ορίσει.

$$Q \setminus (A \cup B) = (Q \setminus A) \cap (Q \setminus B).$$

Πώς αποδεικνύουμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα;

Για να δείξουμε ότι $A = B$, δεν αρκεί να δείξουμε ότι έχουν «παρόμοια» στοιχεία. Πρέπει να αποδείξουμε και τις δύο εγκλείσεις:

$$A \subseteq B \quad \text{και} \quad B \subseteq A.$$

Ισοδύναμα, παίρνουμε ένα αυθαίρετο στοιχείο x και αποδεικνύουμε:

$$x \in A \implies x \in B, \quad x \in B \implies x \in A.$$

Πάραδειγμα: Για σύνολα A, B , δείξτε ότι

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B.$$

Να αποδείξετε ρητά και τις δύο κατευθύνσεις.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Αν $A \subseteq B$ και $x \in A \cup B$, τότε $x \in A$ ή $x \in B$. Και στις δύο περιπτώσεις $x \in B$. Άρα $A \cup B \subseteq B$. Η $B \subseteq A \cup B$ ισχύει πάντα.

($\Leftarrow$) Αν $A \cup B = B$ και $x \in A$, τότε $x \in A \cup B = B$. Άρα $A \subseteq B$.

Το δυναμοσύνολο: σύνολα ως στοιχεία

Το **δυναμοσύνολο** του Q είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του:

$$\mathcal{P}(Q) = \{S : S \subseteq Q\}.$$

Για $Q = \{p, q\}$:

$$\mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}.$$

- Κάθε στοιχείο του Q έχει δύο επιλογές: μέσα ή έξω από το υποσύνολο.
- Επομένως, αν $|Q| = n$, τότε $|\mathcal{P}(Q)| = 2^n$.
- $\emptyset \neq \{\emptyset\}$: το πρώτο έχει 0 στοιχεία, το δεύτερο 1.

Αργότερα στο μάθημα: μία κατάσταση του DFA θα παριστάνει ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων του NFA.

Διατεταγμένα ζεύγη και καρτεσιανό γινόμενο

Στο **διατεταγμένο ζεύγος** η θέση κάθε στοιχείου έχει σημασία:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ και } b = d.$$

Το **καρτεσιανό γινόμενο** περιέχει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Για $A = \{1, 2\}$ και $B = \{x, y\}$:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}.$$

- Αντίστοιχα, ορίζουμε το $A^n, \forall n \geq 1$ ως το σύνολο των διατεταγμένων n -άδων από το A .

Σχέση: ποια ζεύγη συνδέονται;

Μια **δυαδική σχέση** από το A στο B είναι ένα υποσύνολο

$$R \subseteq A \times B.$$

Γράφουμε aRb όταν $(a, b) \in R$.

Για $A = \{1, 2\}$ και $B = \{x, y\}$, η σχέση

$$R = \{(1, x), (1, y)\}$$

συνδέει το 1 με δύο στοιχεία και το 2 με κανένα.

Μια σχέση επιτρέπει μηδέν, μία ή περισσότερες συνδέσεις ανά στοιχείο.

Συνάρτηση: ακριβώς μία τιμή για κάθε είσοδο

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι σχέση με την ιδιότητα

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B : (a, b) \in f.$$

Το σύμβολο $\exists!$ σημαίνει «υπάρχει ακριβώς ένα».

Για $A = \{1, 2\}$ και $B = \{x, y\}$:

Σχέση	Είναι συνάρτηση $A \rightarrow B$;
$\{(1, x), (2, x)\}$	Ναι
$\{(1, x)\}$	Όχι: λείπει τιμή για το 2
$\{(1, x), (1, y), (2, x)\}$	Όχι: δύο τιμές για το 1

Πεδίο ορισμού, σύνολο άφιξης και εικόνα

Για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$:

- A : **πεδίο ορισμού (domain)**, οι επιτρεπτές είσοδοι.
- B : **σύνολο άφιξης (range)**, όπου ανήκουν οι τιμές.
- $\text{im}(f) = \{f(a) : a \in A\}$: **εικόνα (image)**, οι τιμές που πράγματι παίρνει.

Π.χ. Θέτουμε το πεδίο ορισμού $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ και $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$. Το σύνολο άφιξης είναι επίσης το $\mathbb{N}$. Η εικόνα της f είναι οι άρτιοι, δλδ.

$$\text{im}(f) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \subsetneq \mathbb{N}.$$

Γενικότερα, για ένα υποσύνολο $S \subseteq A$: $\text{im}(f|_S) = \{f(s) : s \in S\}$.

Ένα προς ένα, επί και αμφιμονοσήμαντη

Ένα προς ένα (1-1 ή ερριπτική, injective): διαφορετικές είσοδοι έχουν διαφορετικές τιμές.

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Επί (επιρριπτική, surjective): κάθε στοιχείο του B εμφανίζεται ως τιμή.

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A : f(a) = b.$$

Αμφιμονοσήμαντη (αμφιρριπτική, bijective): είναι και ένα προς ένα και επί.

Τότε κάθε στοιχείο του B αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα στοιχείο του A .

Το σύνολο άφιξης έχει σημασία

Ο ίδιος τύπος μπορεί να δίνει διαφορετικές ιδιότητες:

Συνάρτηση	Ένα προς ένα	Επί
$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n$	Ναι	Όχι
$g: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2, 4, \dots\}, g(n) = 2n$	Ναι	Ναι
$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, h(z) = z $	Όχι	Ναι
$\pi: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, \pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1$	Ναι	Ναι

Η f δεν παίρνει ποτέ την τιμή 1. Η h δίνει την ίδια τιμή στις εισόδους 1 και -1 .

Αντίστροφη σχέση και αντίστροφη συνάρτηση

Η **αντίστροφη σχέση** αλλάζει τη σειρά των συνιστωσών:

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, η αντίστροφη σχέση είναι συνάρτηση $B \rightarrow A$ **αν και μόνο αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη.**

$$f^{-1}(f(a)) = a, \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

Παράδειγμα: $g: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2, 4, \dots\}$, $g(n) = 2n$.

$$g^{-1}(2n) = n.$$

Μια σχέση ως συνάρτηση με τιμές σύνολα

Για κάθε είσοδο συγκεντρώνουμε **όλες** τις συνδεδεμένες τιμές:

$$R \subseteq A \times B \quad \longleftrightarrow \quad F_R : A \rightarrow \mathcal{P}(B),$$

$$F_R(a) = \{b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Εδώ $\mathcal{P}(B)$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του B .

Αν $R = \{(1, x), (1, y)\}$ και $A = \{1, 2\}$, τότε

$$F_R(1) = \{x, y\}, \quad F_R(2) = \emptyset.$$

Η F_R είναι συνάρτηση: κάθε είσοδος έχει ακριβώς μία τιμή, ένα σύνολο.

Ίδιο πλήθος σημαίνει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

Τα σύνολα A, B είναι **ισοπληθικά** όταν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f: A \rightarrow B$. Γράφουμε $|A| = |B|$.

Ένα σύνολο είναι **πεπερασμένο** όταν είναι ισοπληθικό με $\{0, \dots, n-1\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|A| = n$. Για $n = 0$ παίρνουμε το κενό σύνολο.

Ένα σύνολο είναι **άπειρο** όταν δεν είναι πεπερασμένο.

Παράδειγμα: οι φυσικοί και οι άρτιοι φυσικοί είναι ισοπληθικοί μέσω $n \mapsto 2n$. Ένα άπειρο σύνολο μπορεί να είναι ισοπληθικό με γνήσιο υποσύνολό του.

Αριθμήσιμα σύνολα: όλα τα στοιχεία χωρούν σε λίστα

- **Αριθμήσιμα άπειρο**: υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$.
- **Αριθμήσιμο**: πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο.
- **Μη αριθμήσιμο**: δεν είναι αριθμήσιμο.

Μια απαρίθμηση ενός αριθμήσιμα άπειρου συνόλου έχει τη μορφή

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

Κάθε στοιχείο εμφανίζεται **σε κάποια πεπερασμένη θέση**. Για αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Άσκηση: Απαριθμήστε τους ακέραιους $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Τεχνική Dovetailing: Διαγώνια απαρίθμηση

Έστω δύο ξένα αριθμήσιμα άπειρα σύνολα

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}, \quad B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}.$$

Η απαίτηση της απαρίθμησης: μια ακολουθία $e : \mathbb{N} \rightarrow A \cup B$ πρέπει να περιλαμβάνει κάθε στοιχείο σε κάποια πεπερασμένη θέση:

$$\forall x \in A \cup B \exists n \in \mathbb{N} : e(n) = x.$$

Γιατί αποτυγχάνει το «πρώτα A , μετά B »;

- Αν θέσουμε $e(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει όλες τις θέσεις.
- Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός «μετά από όλους τους φυσικούς», στον οποίο να τοποθετήσουμε το b_0 .
- Άρα κανένα στοιχείο του B δεν εμφανίζεται: η e δεν είναι επί του $A \cup B$.

Τεχνική Dovetailing

Τεχνική Dovetailing: Διαγώνια απαρίθμηση

Έστω $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ και $B = \{b_0, b_1, \dots\}$.

Για να καλύψουμε την ένωση, εναλλάσσουμε τις δύο λίστες:

$$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$$

Άρα:

$$e(2n) = a_n, \quad e(2n + 1) = b_n.$$

Τώρα κάθε στοιχείο έχει συγκεκριμένη πεπερασμένη θέση.

- Αν τα A, B δεν είναι ξένα, και ένα στοιχείο έχει ήδη εμφανιστεί, παραλείπουμε την επανάληψη.

Άσκηση: Η ένωση πεπερασμένων σε πλήθος αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμη.

Επόμενο ερώτημα: Ναδειχθεί ότι $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$: γιατί όχι μία γραμμή κάθε φορά;

Αν ξεκινήσουμε απαριθμώντας όλα τα ζεύγη με $i = 0$,

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots,$$

δεν θα φτάσουμε ποτέ στο $(1, 0)$.

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$: γιατί όχι μία γραμμή κάθε φορά;

Αν ξεκινήσουμε απαριθμώντας όλα τα ζεύγη με $i = 0$,

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots,$$

δεν θα φτάσουμε ποτέ στο $(1, 0)$.

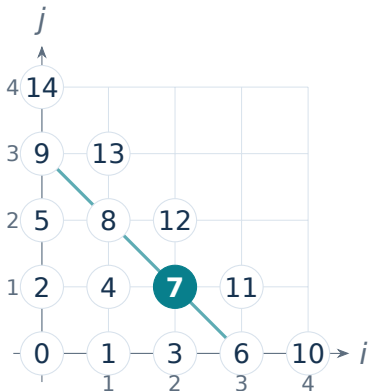
Δεν εξαντλούμε μία άπειρη γραμμή

Χωρίζουμε το πλέγμα σε **πεπερασμένες διαγωνίους** και ολοκληρώνουμε τη μία πριν περάσουμε στην επόμενη.

$$D_s = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i + j = s\}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Κάθε ζεύγος βρίσκεται σε μία και μόνο διαγώνιο: εκείνη με **$s = i + j$** .

Τεχνική Dovetailing: Διαγώνια απαρίθμηση



Στο σημείο (i, j) γράφουμε τον αριθμό $\pi(i, j)$.

s	Σειρά επίσκεψης στη διαγώνιο
-----	------------------------------

0	$(0, 0)$
---	----------

1	$(1, 0), (0, 1)$
---	------------------

2	$(2, 0), (1, 1), (0, 2)$
---	--------------------------

3	$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$
---	----------------------------------

$(s, 0), (s-1, 1), \dots, (0, s)$

Σε κάθε διαγώνιο, το j αυξάνεται κατά 1.

Πόσα σημεία προηγούνται της διαγωνίου s ;

Η διαγώνιος D_s περιέχει $s + 1$ σημεία. Όμως πριν από αυτήν βρίσκονται οι $D_0, \dots, D_{s-1}$:

$$\underbrace{1}_{D_0} + \underbrace{2}_{D_1} + \dots + \underbrace{s}_{D_{s-1}}.$$

Πόσα σημεία προηγούνται της διαγωνίου s ;

Η διαγώνιος D_s περιέχει $s + 1$ σημεία. Όμως πριν από αυτήν βρίσκονται οι $D_0, \dots, D_{s-1}$:

$$\underbrace{1}_{D_0} + \underbrace{2}_{D_1} + \dots + \underbrace{s}_{D_{s-1}}.$$

Άρα η αρχική θέση της D_s είναι ο **τριγωνικός αριθμός**

$$T_s = \sum_{r=0}^{s-1} (r+1) = \frac{s(s+1)}{2}.$$

s	0	1	2	3	4	5
T_s	0	1	3	6	10	15

Για $s = 0$, το άθροισμα είναι κενό και $T_0 = 0$. Μετράμε τα σημεία πριν από τη διαγώνιο, όχι και τα δικά της.

Κωδικοποίηση: από το (i, j) στον αριθμό n

1. Βρίσκουμε τη διαγώνιο: $s = i + j$.

Κωδικοποίηση: από το (i, j) στον αριθμό n

1. Βρίσκουμε τη διαγώνιο: $s = i + j$.

2. Μετράμε όσα σημεία προηγούνται:

$$T_s = \frac{s(s+1)}{2}.$$

Κωδικοποίηση: από το (i, j) στον αριθμό n

1. Βρίσκουμε τη διαγώνιο: $s = i + j$.

2. Μετράμε όσα σημεία προηγούνται:

$$T_s = \frac{s(s+1)}{2}.$$

3. Μετακινούμαστε μέσα στη διαγώνιο: j βήματα.

$$(s, 0), (s-1, 1), \dots, \underbrace{(s-j, j)}_{(i, j)}, \dots, (0, s).$$

Κωδικοποίηση: από το (i, j) στον αριθμό n

1. Βρίσκουμε τη διαγώνιο: $s = i + j$.

2. Μετράμε όσα σημεία προηγούνται:

$$T_s = \frac{s(s+1)}{2}.$$

3. Μετακινούμαστε μέσα στη διαγώνιο: j βήματα.

$$(s, 0), (s-1, 1), \dots, \underbrace{(s-j, j)}_{(i,j)}, \dots, (0, s).$$

Επομένως $n = T_s + j$, δηλαδή

$$\pi(i, j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j.$$

Ο τύπος δεν χρειάζεται απομνημόνευση

$$\pi(i, j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$$

$$\pi(i, j) = \underbrace{T_{i+j}}_{\text{παραλείπουμε όλα τα προηγούμενα σημεία}} + \underbrace{j}_{\text{βήματα μέσα στη διαγώνιο}}$$

Αρχή διαγωνίου + θέση μέσα σε αυτήν.

Το j είναι **μετατόπιση από το 0**: το πρώτο σημείο $(s, 0)$ έχει μετατόπιση 0, όχι 1.

Παράδειγμα: πού πηγαίνει το $(2, 1)$;

Διαγώνιος: $s = 2 + 1 = 3$.

Παράδειγμα: πού πηγαίνει το $(2, 1)$;

Διαγώνιος: $s = 2 + 1 = 3$.

Προηγούμενα σημεία:

$$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Παράδειγμα: πού πηγαίνει το $(2, 1)$;

Διαγώνιος: $s = 2 + 1 = 3$.

Προηγούμενα σημεία:

$$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Μετατόπιση: $j = 1$.

$$\pi(2, 1) = 6 + 1 = 7.$$

Η διαγώνιος D_3

Ζεύγος	Αριθμός
$(3, 0)$	6
$(2, 1)$	7
$(1, 2)$	8
$(0, 3)$	9

Παραλείπουμε 6 σημεία και προχωρούμε 1 βήμα.

Άσκηση (Φροντιστήριο Παρασκευή): Υπολογίστε την αντίστροφη συνάρτηση.

Υπόδειξη: ξεκινήστε με το εξής ερώτημα αποκωδικοποίησης: σε ποια διαγώνιο βρίσκεται το n ;

Dovetailing

Υπάρχει λοιπόν μια **αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία**

$$\pi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

και η αντίστροφή της, συνεπώς

$$|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Το ουσιαστικό τέχνασμα

Δεν προσπαθούμε να τελειώσουμε μία άπειρη γραμμή. Ολοκληρώνουμε διαδοχικά πεπερασμένες διαγωνίους, έτσι ώστε κάθε ζεύγος να φτάνει τελικά στη σειρά του.

Διαγώνιος. Αρχή. Μετατόπιση.

Καρτεσιανό γινόμενο, σχέσεις και συναρτήσεις

Το $A \times B$ περιέχει τα **διατεταγμένα ζεύγη** (a, b) με $a \in A$, $b \in B$. Μια **δυαδική σχέση** είναι ένα υποσύνολο $R \subseteq A \times B$.

$$A = \{p, q\}, \quad B = \{0, 1\}, \quad R = \{(p, 0), (p, 1), (q, 1)\}.$$

- Σε μια σχέση, ένα στοιχείο μπορεί να σχετίζεται με κανένα, ένα ή πολλά στοιχεία.
- Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ δίνει **ακριβώς μία** τιμή σε κάθε $a \in A$.

Για ένα σύμβολο a , ένα NFA μπορεί να έχει $\delta(p, a) = \{q, r\}$. **Η δ παραμένει συνάρτηση**: η μοναδική τιμή της είναι ένα σύνολο.

Κατευθυνόμενα γραφήματα και διαδρομές

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι $G = (V, E)$, όπου $E \subseteq V \times V$. Η ακμή (u, v) επιτρέπει ένα βήμα από το u στο v .



Διαδρομή μήκους k : ακολουθία $v_0, \dots, v_k$ με $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

- Επιτρέπουμε επαναλήψεις: a, b, c, b, c, d έχει μήκος 5.
- Μήκος 0: η διαδρομή που αποτελείται μόνο από μία κορυφή.
- Προσπελάσιμες από το a : $\{a, b, c, d\}$. Το e είναι απομονωμένο.

Ιδιότητες μιας σχέσης πάνω στο ίδιο σύνολο

Για $R \subseteq V \times V$:

- **Ανακλαστική:** $(u, u) \in R$ για κάθε $u \in V$. Κάθε στοιχείο σχετίζεται με τον εαυτό του.
- **Συμμετρική:** $(u, v) \in R \Rightarrow (v, u) \in R$. Κάθε ακμή έχει και την αντίστροφή της.
- **Μεταβατική:** $(u, v), (v, w) \in R \Rightarrow (u, w) \in R$. Δύο διαδοχικές σχέσεις συνεπάγονται μια άμεση σχέση.

Μια σχέση με και τις τρεις ιδιότητες λέγεται σχέση ισοδυναμίας.

Ένα βήμα, δύο βήματα, οποιοσδήποτε αριθμός βημάτων

Έστω σχέση $R \subseteq V \times V$, δηλαδή οι επιτρεπτές ακμές.

$$R^0 = I_V = \{(v, v) : v \in V\}, \quad R^1 = R.$$

$$(u, w) \in R^{k+1} \iff \exists v ((u, v) \in R^k \wedge (v, w) \in R).$$

Άρα $(u, v) \in R^k$ σημαίνει διαδρομή μήκους **ακριβώς** k .

$$R^+ = \bigcup_{k \geq 1} R^k$$

$$R^* = \bigcup_{k \geq 0} R^k = I_V \cup R^+$$

- R^+ : ένα ή περισσότερα βήματα, **μεταβατική κλειστότητα**.
- R^* : μηδέν ή περισσότερα, **ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα**.

Προσοχή: ένας κύκλος μπορεί να δώσει $(v, v) \in R^+$.

Τι σημαίνει «κλειστό ως προς έναν κανόνα»;

Για $S \subseteq V$, ορίζουμε τους άμεσους διαδόχους:

$$\text{Post}_R(S) = \{v \in V : \exists u \in S \text{ με } (u, v) \in R\}.$$

Ένα σύνολο C είναι **R -κλειστό** όταν

$$\text{Post}_R(C) \subseteq C.$$

Με λόγια: αν έχουμε ήδη μια κορυφή του C , κάθε επιτρεπτό επόμενο βήμα παραμένει μέσα στο C . Στο γράφημα $a \rightarrow b \rightleftharpoons c \rightarrow d$, με απομονωμένο e :

$\{b, c, d\}$ είναι κλειστό, $\{a, b\}$ δεν είναι: λείπει το c .

Η κλειστότητα ενός αρχικού συνόλου

Η $cl_R(S)$ είναι το **μικρότερο R -κλειστό σύνολο που περιέχει το S .**

$$cl_R(S) = \text{Reach}_R(S) = \{v : \exists s \in S \text{ με } (s, v) \in R^*\}.$$

Ο χαρακτηρισμός «μικρότερο» σημαίνει:

1. $S \subseteq cl_R(S)$: κρατάμε τις αρχικές κορυφές.
2. $cl_R(S)$ είναι R -κλειστό: περιέχει όλους τους διαδόχους του.
3. Αν $S \subseteq C$ και C είναι R -κλειστό, τότε $cl_R(S) \subseteq C$.

Ισοδύναμα:

$$cl_R(S) = \bigcap \{C \subseteq V : S \subseteq C \text{ και } \text{Post}_R(C) \subseteq C\}.$$

Υπολογισμός της κλειστότητας βήμα προς βήμα



$$S_0 = \{a\}, \quad S_{i+1} = S_i \cup \text{Post}_R(S_i).$$

Γύρος	Σύνολο	Νέα στοιχεία
0	$S_0 = \{a\}$	αρχική κορυφή
1	$S_1 = \{a, b\}$	b
2	$S_2 = \{a, b, c\}$	c
3	$S_3 = \{a, b, c, d\}$	d
4	$S_4 = S_3$	κανένα

Ο κύκλος δεν προσθέτει συνεχώς νέα στοιχεία. Σταματάμε όταν $S_{i+1} = S_i$.

Τρεις βασικές ιδιότητες της κλειστότητας

Για $S, T \subseteq V$:

$$S \subseteq \text{cl}_R(S)$$

επεκτατικότητα

$$S \subseteq T \Rightarrow \text{cl}_R(S) \subseteq \text{cl}_R(T)$$

μονοτονία

$$\text{cl}_R(\text{cl}_R(S)) = \text{cl}_R(S)$$

ιδιοδυναμία

- Μηδέν βήματα αρκούν για να κρατήσουμε κάθε στοιχείο του S .
- Περισσότερες αφετηρίες δίνουν τουλάχιστον τις ίδιες προσπελάσιμες κορυφές.
- Διαδρομή μετά από διαδρομή είναι πάλι διαδρομή.

Αυτές οι ιδιότητες ορίζουν αφηρημένα έναν **τελεστή κλειστότητας**.

Εάν ... τότε ...

Συνεπαγωγή

$$P \rightarrow Q$$

Πότε είναι ψευδής μια συνεπαγωγή;

Η πρόταση

$$P \rightarrow Q$$

εκφράζει τον κανόνα: «**Αν ισχύει το P , τότε ισχύει το Q** ».

Ο κανόνας παραβιάζεται μόνο όταν το P είναι αληθές και το Q είναι ψευδές.

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Εύλογη απορία: Γιατί όταν το P είναι ψευδές η συνεπαγωγή είναι αληθής;

Πότε είναι ψευδής μια συνεπαγωγή: Ένα παράδειγμα

Ο κανόνας «Κάθε πολλαπλάσιο του 4 είναι άρτιο» γράφεται:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \underbrace{4 \mid n}_{P(n)} \rightarrow \underbrace{2 \mid n}_{Q(n)}.$$

Για να τον ελέγξουμε, εξετάζουμε κάθε ακέραιο n .

n	$4 \mid n$	$2 \mid n$	Παραβιάζει τον κανόνα;
8	T	T	Όχι
6	F	T	Όχι
7	F	F	Όχι

Τα 6 και 7 δεν είναι πολλαπλάσια του 4. Ο κανόνας δεν απαιτεί τίποτε από αυτά.

Αντιπαράδειγμα θα ήταν ένας ακέραιος που είναι πολλαπλάσιο του 4, αλλά δεν είναι άρτιος. Γι' αυτό ορίζουμε:

$$P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg P \vee Q.$$

Η αντιθετοαντιστροφή έχει τον ίδιο πίνακα αλήθειας

Η αντιθετοαντίστροφη της $P \rightarrow Q$ είναι η $\neg Q \rightarrow \neg P$.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Οι δύο τελευταίες στήλες είναι ίδιες:

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P).$$

Και οι δύο προτάσεις αποκλείουν την ίδια περίπτωση:

$$P \wedge \neg Q.$$

Αντιθετοαντιστροφή: ο ίδιος κανόνας αλλιώς

Αρχική πρόταση

$$4 \mid n \rightarrow 2 \mid n.$$

«Αν ο n είναι πολλαπλάσιο του 4, τότε είναι άρτιος.»

Ισοδύναμη αντιθετοαντίστροφη

$$2 \nmid n \rightarrow 4 \nmid n.$$

«Αν ο n δεν είναι άρτιος, τότε δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.»

Για να αποδείξουμε $P \rightarrow Q$, μπορούμε να υποθέσουμε $\neg Q$ και να αποδείξουμε $\neg P$.

Προσοχή στην αντίστροφη:

$$2 \mid n \rightarrow 4 \mid n.$$

Αυτή είναι διαφορετική πρόταση και είναι ψευδής: το 6 είναι άρτιο, αλλά δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.

Ποσοδείκτες

$\exists, \forall$

Η λογική μορφή καθοδηγεί την απόδειξη

Στόχος	Τι χρειάζεται
$\forall x \in D : P(x)$	Αυθαίρετο $x \in D$, απόδειξη του $P(x)$
$\exists x \in D : P(x)$	Μάρτυρας x και έλεγχος του $P(x)$
$P \Rightarrow Q$	Υπόθεση P , συμπέρασμα Q
$P \Leftrightarrow Q$	Και οι δύο κατευθύνσεις
$\neg(\forall x : P(x))$	Ένα x με $\neg P(x)$

Ερώτηση: Τι εννοούμε με το **μάρτυρας** (witness);

Τι είναι ένας μάρτυρας;

Ένας **μάρτυρας** για την πρόταση

$$\exists x \in D : P(x)$$

είναι ένα συγκεκριμένο στοιχείο $x \in D$ για το οποίο ισχύει η ιδιότητα $P(x)$.

Παράδειγμα 1: Μια συγκεκριμένη τιμή

$$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 9.$$

Το $n = 3$ είναι μάρτυρας, επειδή $3^2 = 9$.

Παράδειγμα 2: Μια επιλογή που εξαρτάται από την είσοδο

$$\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : y > x.$$

Για κάθε δοσμένο x , επιλέγουμε ως μάρτυρα το $y = x + 1$. Πράγματι, $x + 1 \in \mathbb{N}$ και $x + 1 > x$.

Εναλλαγές ποσοδεικτών: από τι εξαρτάται ο μάρτυρας;

Για κάθε είσοδο υπάρχει κατάλληλη επιλογή

$$\forall x \in X \exists y \in Y : R(x, y).$$

Μας δίνεται αυθαίρετο x . Επιλέγουμε y , που **μπορεί να εξαρτάται από το x** , και αποδεικνύουμε $R(x, y)$.

Υπάρχει μία επιλογή που λειτουργεί για όλες τις εισόδους

$$\exists y \in Y \forall x \in X : R(x, y).$$

Επιλέγουμε **ένα σταθερό y** , πριν δοθεί το x , και δείχνουμε ότι λειτουργεί για κάθε x .

Παράδειγμα στους φυσικούς

$\underbrace{\forall x \exists y : y > x}$	$\underbrace{\exists y \forall x : y > x} \quad .$
Αληθές: επιλέγουμε $y=x+1$	Ψευδές: θέτουμε $x=y$

Η σειρά των ποσοδεικτών καθορίζει τις επιτρεπτές εξαρτήσεις.

Υπενθύμιση: Μη υπολογισσιμότητα = κάθε αλγόριθμος κάπου αποτυγχάνει

Έστω $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$ το επιθυμητό αποτέλεσμα ενός προβλήματος απόφασης.
Γράφουμε $P(D) \downarrow = \Pi(D)$ όταν ο P τερματίζει στην είσοδο D και επιστρέφει τη σωστή απάντηση.

Το πρόβλημα είναι υπολογίσιμο αν

$$\exists P \forall D \in \mathcal{D} : P(D) \downarrow = \Pi(D),$$

όπου ο P κυμαίνεται στους αλγορίθμους.

Το πρόβλημα είναι μη υπολογίσιμο αν

$$\neg \exists P \forall D \in \mathcal{D} : P(D) \downarrow = \Pi(D).$$

Ισοδύναμα,

$$\forall P \exists D \in \mathcal{D} : \neg (P(D) \downarrow = \Pi(D)).$$

Αποδεικτική υποχρέωση: για κάθε υποψήφιο P , δείχνουμε ότι υπάρχει είσοδος D στην οποία δίνει λάθος απάντηση ή δεν τερματίζει.

Η είσοδος D μπορεί να εξαρτάται από τον P . Δεν απαιτείται μία κοινή είσοδος που νικά όλους τους αλγορίθμους.

Όριο ακολουθίας: μια αλυσίδα εξαρτήσεων

Για πραγματική ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$a_n \longrightarrow L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon.$$

1. Μας δίνεται αυθαίρετη ακρίβεια $\varepsilon > 0$.
2. Επιλέγουμε N συναρτήσει του ε .
3. Αποδεικνύουμε την ανισότητα για κάθε $n \geq N$.

Σε απλά λόγια: Όσο μικρό σφάλμα κι αν μου ζητήσεις, μπορώ να σου δώσω έναν δείκτη από τον οποίο και μετά όλοι οι όροι απέχουν από το όριο λιγότερο από αυτό το σφάλμα.

Παράδειγμα: $a_n = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$. **Λύση στον πίνακα**

Ερώτηση κατανόησης

Ποιες προτάσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

$$(\alpha) \quad \forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : y > x$$

$$(\beta) \quad \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} : y > x$$

Γράψτε την άρνηση καθεμιάς.

Λύση: Ερώτηση κατανόησης

Η (α) είναι αληθής: για κάθε x επιλέγουμε $y = x + 1$. Η (β) είναι ψευδής: για οποιοδήποτε υποψήφιο y , θέτουμε $x = y$.

$$\neg(\alpha) : \quad \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : y \leq x.$$

$$\neg(\beta) : \quad \forall y \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N} : y \leq x.$$

Μερικές κύριες τεχνικές αποδείξεων

- Η λίστα τεχνικών δεν είναι εξαντλητική.
- Αξίζει να σημειωθεί πως σε σύνθετες αποδείξεις, μπορεί να πρέπει να συνδυάσουμε πάνω από μια τεχνικές

Η δομή μιας ευθείας απόδειξης

Πρόταση. Αν ισχύει το P , τότε ισχύει το Q .

$$P \Rightarrow Q$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει το P .

$$P \Rightarrow P_1$$

$$\Rightarrow P_2$$

$$\Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow Q.$$

Επομένως, ισχύει το Q . ■

Κάθε βήμα αιτιολογείται με **ορισμούς**, **υποθέσεις** ή **ήδη αποδεδειγμένα αποτελέσματα**.

Παράδειγμα Ευθείας απόδειξης

Πρόταση. Το άθροισμα δύο άρτιων ακεραίων είναι άρτιο.

Απόδειξη. Έστω αυθαίρετοι άρτιοι $a, b \in \mathbb{Z}$. Από τον ορισμό του άρτιου αριθμού, υπάρχουν $r, s \in \mathbb{Z}$ με $a = 2r$, $b = 2s$. Συνεπώς το άθροισμα μπορεί να γραφεί ως

$$a + b = 2r + 2s = 2(r + s).$$

Εφόσον $r + s \in \mathbb{Z}$, ο $a + b$ είναι άρτιος. ■

Παράδειγμα: ευθεία απόδειξη

Πρόταση. Αν x είναι άρτιος ακέραιος, τότε

$$x^2 - 6x + 5$$

είναι περιττός.

Ευθεία απόδειξη. Έστω ότι ο x είναι άρτιος. Τότε, από τον ορισμό του άρτιου ακεραίου, υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$x = 2a.$$

Άρα

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= (2a)^2 - 6(2a) + 5 = 4a^2 - 12a + 5 \\ &= 4a^2 - 12a + 4 + 1 = 2(2a^2 - 6a + 2) + 1. \end{aligned}$$

Θέτοντας $b = 2a^2 - 6a + 2 \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε $x^2 - 6x + 5 = 2b + 1$.

Άρα $x^2 - 6x + 5$ είναι περιττός, από τον ορισμό του περιττού ακεραίου. ■

Hammack, σ. 130.

Γιατί χρησιμοποιούμε την αντιθετοαντιστροφή;

Για να αποδείξουμε μια πρόταση της μορφής

$$P \Rightarrow Q,$$

πρέπει να ξεκινήσουμε από την υπόθεση ότι ισχύει το P και να καταλήξουμε στο Q .

Όμως, πολλές φορές το Q δεν έχει μια εύχρηστη μορφή:

- μπορεί να είναι δύσκολο να το «κατασκευάσουμε» άμεσα,
- μπορεί να εκφράζει μια καθολική ιδιότητα,
- ενώ η άρνησή του, $\neg Q$, δίνει ένα συγκεκριμένο **αντιπαράδειγμα**.

Τότε είναι συχνά απλούστερο να αποδείξουμε την **αντιθετοαντιστροφή**:

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Όπως είδαμε νωρίτερα, οι δύο προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες:

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Βλ. Hammack, σ. 130.

Ένα τυπικό παράδειγμα

Ισχυρισμός. Αν n^2 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος.

Άμεση απόδειξη; Θα ξεκινούσαμε από

$$n^2 \text{ άρτιος}$$

και θα έπρεπε να συμπεράνουμε ότι $n = 2k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Αυτό δεν είναι η πιο φυσική διαδρομή.

Αντιθετοαντιστροφή. Αποδεικνύουμε:

$$n \text{ περιττός} \Rightarrow n^2 \text{ περιττός.}$$

Αν $n = 2k + 1$, τότε

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

άρα n^2 είναι περιττός.

Επομένως, αν n^2 είναι άρτιος, ο n δεν μπορεί να είναι περιττός. Άρα ο n είναι άρτιος.



Παράδειγμα: απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή

Πρόταση. Έστω $x \in \mathbb{Z}$. Αν

$$x^2 - 6x + 5$$

είναι άρτιος, τότε ο x είναι περιττός.

Απόδειξη (αντιθετοαντιστροφή). Θα αποδείξουμε ότι:

$$x \text{ άρτιος} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 \text{ περιττός.}$$

Αν ο x είναι άρτιος, τότε $x = 2a$ για κάποιο $a \in \mathbb{Z}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= (2a)^2 - 6(2a) + 5 \\ &= 4a^2 - 12a + 5 \\ &= 4a^2 - 12a + 4 + 1 \\ &= 2(2a^2 - 6a + 2) + 1. \end{aligned}$$

Άρα $x^2 - 6x + 5$ είναι περιττός.

Επομένως, αν $x^2 - 6x + 5$ είναι άρτιος, τότε ο x δεν είναι άρτιος, δηλαδή είναι περιττός. ■

Γιατί χωρίζουμε μια απόδειξη σε περιπτώσεις;

Μερικές φορές τα στοιχεία ενός συνόλου δεν συμπεριφέρονται όλα με τον ίδιο τρόπο.

Τότε χωρίζουμε το σύνολο των δυνατών περιπτώσεων σε λίγες κατηγορίες:

$$A = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k,$$

ώστε κάθε στοιχείο του A να ανήκει σε τουλάχιστον μία από αυτές.

Για να αποδείξουμε ότι κάθε $x \in A$ έχει ιδιότητα Q , αρκεί να δείξουμε:

$$x \in C_1 \Rightarrow Q, \quad x \in C_2 \Rightarrow Q, \quad \dots, \quad x \in C_k \Rightarrow Q.$$

Η ουσία: οι περιπτώσεις πρέπει να καλύπτουν όλες τις δυνατότητες.

Για τους ακεραίους, η πιο συνηθισμένη διάσπαση είναι:

κάθε $n \in \mathbb{Z}$ είναι είτε άρτιος είτε περιττός.

Παράδειγμα: άρτιος ή περιττός

Πρόταση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός

$$1 + (-1)^n(2n - 1)$$

είναι πολλαπλάσιο του 4.

Κάθε φυσικός n είναι είτε άρτιος είτε περιττός. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: n άρτιος. Τότε $n = 2k$ και $(-1)^n = 1$. Άρα

$$1 + (-1)^n(2n - 1) = 1 + (1)(4k - 1) = 4k.$$

Περίπτωση 2: n περιττός. Τότε $n = 2k + 1$ και $(-1)^n = -1$. Άρα

$$1 + (-1)^n(2n - 1) = 1 - (2(2k + 1) - 1) = -4k.$$

Και στις δύο περιπτώσεις, το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 4.



Απόδειξη με αντίφαση: η βασική ιδέα

Θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση P .

Αντί να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε άμεσα το P , υποθέτουμε το αντίθετό του:

$$\neg P.$$

Αν από αυτή την υπόθεση καταλήξουμε σε μια **αντίφαση**, τότε η υπόθεση $\neg P$ δεν μπορεί να είναι αληθής. Άρα η P είναι αληθής.

Μια αντίφαση έχει τη μορφή

$$C \wedge \neg C :$$

δηλαδή καταλήγουμε ότι μια πρόταση C είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής.

Σχήμα απόδειξης με αντίφαση

Πρόταση: P .

Απόδειξη: Υποθέτουμε $\neg P$ Καταλήγουμε σε $C \wedge \neg C$. Άρα P .

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί

Πρόταση. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Απόδειξη. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι πρώτοι αριθμοί. Τότε μπορούμε να τους απαριθμήσουμε ως

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n,$$

όπου $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$ κ.ο.κ. Άρα ο p_n είναι ο n -οστός και μεγαλύτερος πρώτος αριθμός.

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό

$$a = (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) + 1,$$

δηλαδή τον αριθμό που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους πρώτους αριθμούς και προσθέσουμε 1.

Ο a , όπως κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1, έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη. Επομένως $p_k \mid a$ για κάποιον από τους πρώτους της λίστας, p_k . Άρα υπάρχει ακέραιος c τέτοιος ώστε

$$a = cp_k.$$

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί

Δηλαδή,

$$(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k p_{k+1} \cdots p_n) + 1 = c p_k.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με p_k , παίρνουμε

$$(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n) + \frac{1}{p_k} = c.$$

Άρα

$$\frac{1}{p_k} = c - (p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n).$$

Το δεξί μέλος είναι ακέραιος, ενώ το αριστερό μέλος δεν είναι ακέραιος. Αυτό είναι άτοπο.

Άρα η αρχική υπόθεση ήταν λανθασμένη:

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Κατασκευαστική απόδειξη · Η γέφυρα

Τέσσερα άτομα χρειάζονται 1, 2, 5, 10 λεπτά για να διασχίσουν μια γέφυρα.

- Χωρούν το πολύ δύο άτομα ταυτόχρονα.
- Κάθε διάσχιση απαιτεί τον μοναδικό φακό.
- Ένα ζευγάρι κινείται με την ταχύτητα του πιο αργού.

Ερώτημα Μπορούν όλοι να περάσουν σε 17 λεπτά;

Η γέφυρα · Μια αποτυχημένη στρατηγική

Αν το άτομο του 1 λεπτού συνοδεύει καθέναν από τους άλλους:

$$2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19.$$

Αυτό αποκλείει τη συγκεκριμένη στρατηγική.

Για να αξιοποιήσουμε τον χρόνο, δοκιμάζουμε να περάσουν οι 5 και 10 μαζί.

Ποιος θα βρίσκεται ήδη απέναντι για να επιστρέψει τον φακό;

Λύση: Η γέφυρα σε 17 λεπτά

Κίνηση	Χρόνος	Σύνολο
1, 2 περνούν	2	2
1 επιστρέφει	1	3
5, 10 περνούν	10	13
2 επιστρέφει	2	15
1, 2 περνούν	2	17

Ο 2 περιμένει απέναντι και επιστρέφει αργότερα. Η κατασκευή αποδεικνύει εφικτότητα σε 17 λεπτά. **Πάει πιο κάτω;**

Πηγή / περαιτέρω ανάγνωση. Το κλασικό *Bridge and Torch Problem* (γνωστό και ως *Bridge Crossing Puzzle*). Για τη γενική, αλγοριθμική εκδοχή του προβλήματος, βλ. G. Rote, *Crossing the Bridge at Night*, EATCS Bulletin 78 (2002), 241--246.

Επόμενη διάλεξη

Επαγωγή, Συμβολοσειρές (Strings), αναδρομή

Στην επόμενη διάλεξη θα δούμε σε λεπτομέρεια:

- Την επαγωγή ως τεχνική
- Συμβολοσειρές