



ΗΥ - 280 Θεωρία Υπολογισμού

Διάλεξη 16

Κωνσταντίνος Βάρσος

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών – Πανεπιστήμιο Κρήτης

Χειμερινό εξάμηνο 2025 - 26

Υπολογισιμότητα

Τι είδαμε στην Διάλεξη 15

- Αναγωγή βάσει υπολογιστικού χρονικού.
- Απεικονιστική αναγωγή.
- Ιδιότητες απεικονιστικής αναγωγής.

Ιδιότητα γλώσσας

Έστω οι μη-διαγνώσιμες γλώσσες,

- $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \emptyset\}.$
- $ALL_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \Sigma^*\}.$
- $REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) \text{ είναι κανονική } \}.$
- $L_{01010101} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } 01010101 \in L(M)\}.$

? Μπορούμε να βρούμε τι κοινό έχουν οι γλώσσες το οποίο τις καθιστά μη-διαγνώσιμες.

■ Το πρόβλημα που ορίζουν αφορά τις γλώσσες εκείνες για τις οποίες μια TM έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.

Ορισμός. Μια κλάση γλωσσών $\mathcal{P}$ ονομάζεται **ιδιότητα** των γλωσσών που αναγνωρίζονται από TM αν τα μέλη της $\mathcal{P}$ είναι γλώσσες που αναγνωρίζονται από TM, δηλαδή για κάθε $L \in \mathcal{P}$ υπάρχει μια TM που αναγνωρίζει την L .

π.χ., $\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ κανονική} \}$ ✓, $\mathcal{P} = \{EQ_{TM}, A_{TM}\}$ ✗

Ιδιότητα γλώσσας

Ορισμός. Μια ιδιότητα $\mathcal{P}$ των γλωσσών που αναγνωρίζονται από TM λέγεται **μη-τετριμμένη** αν

- $\exists \text{ TM } M \text{ τ.ω. } \langle M \rangle \in \mathcal{P}.$
- $\exists \text{ TM } N \text{ τ.ω. } \langle N \rangle \notin \mathcal{P}.$

π.χ., Μη-τετριμμένες ιδιότητες,

- $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \emptyset\}.$
- $ALL_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \Sigma^*\}.$
- $REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) \text{ είναι κανονική } \}.$
- $L_{01010101} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } 01010101 \in L(M)\}.$

■ Μια ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι μη-τετριμμένη αν ορισμένες αναγνωρίσιμες γλώσσες έχουν την ιδιότητα και άλλες όχι.

Ιδιότητα γλώσσας

Ορισμός. Μια γλώσσα $\mathcal{P}$ η οποία είναι **ιδιότητα** των TM λέγεται **μη-τετριμμένη** ανν

- $\exists \text{ TM } M \text{ τ.ω. } \langle M \rangle \in \mathcal{P}.$
- $\exists \text{ TM } N \text{ τ.ω. } \langle N \rangle \notin \mathcal{P}.$

π.χ., Τετριμμένες ιδιότητες,

- $\mathcal{P} = \{L \mid M \text{ TM και } L(M) = \emptyset\}.$
- $ALL_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \Sigma^*\}.$
- $REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) \text{ είναι κανονική } \}.$
- $L_{01010101} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } 01010101 \in L(M)\}.$

Ιδέα. Μπορούμε να γενικεύσουμε τις αποδείξεις της μη-διαγνωσιμότητας σε ένα 'μεταθεώρημα' που λειτουργεί για όλες τις γλώσσες που μιλούν για μη-τετριμμένες ιδιότητες των γλωσσών των μηχανών Turing.

Θεώρημα Rice

■ Έστω $\mathcal{P}$ μια ιδιότητα, τότε η γλώσσα $\mathcal{P}_{TM}$ ορίζεται ως

$$\mathcal{P}_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}.$$

Θεώρημα. Αν $\mathcal{P}$ η οποία είναι μη-τετριμμένη ιδιότητα των γλωσσών των TM, τότε η $\mathcal{P}_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{P}$ είναι μη-τετριμμένη ιδιότητα των γλωσσών που αναγνωρίζονται από TM, τότε μπορούμε να κάνουμε αναγωγή την A_{TM} στην $\mathcal{P}_{TM}$. Συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε, δεδομένου του $\langle M, w \rangle$, την περιγραφή μιας μηχανής M' τέτοια ώστε

$$M \text{ αποδέχεται } w \iff L(M') \in \mathcal{P}.$$

Εφόσον $\mathcal{P}$ είναι μη-τετριμμένη, υπάρχει κάποια γλώσσα $L_1 \in \mathcal{P}$ και κάποια άλλη γλώσσα $L_2 \notin \mathcal{P}$.

Θεώρημα Rice

Απόδειξη. (συνέχεια) Παίρνουμε ως $L_2 = \emptyset$, δηλαδή υποθέτουμε ότι $\emptyset \notin \mathcal{P}$.

Εφόσον L_1 είναι αναγνωρίσιμη, υπάρχει μια TM που την αναγνωρίζει, την ονομάζουμε M_L .

Τώρα περιγράφουμε την απεικονιστική αναγωγή από A_{TM} σε $\mathcal{P}_{TM}$. Δεδομένου του $\langle M, w \rangle$ και χρησιμοποιώντας την περιγραφή του M_L , κατασκευάζουμε την περιγραφή μιας νέας μηχανής M' ως εξής:

$M' =$ “Για είσοδο x :

1. Προσομοιώσε τη μηχανή M πάνω στην είσοδο w .
2. Αν M αποδεχθεί w , τότε προσομοιώσε M_L πάνω στο x .
3. Αν M_L αποδεχθεί, τότε **αποδέχεται**.”

...

Θεώρημα Rice

Απόδειξη. (συνέχεια) **Ορθότητα**, δηλαδή ελέγχουμε ότι

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff \langle M' \rangle \in \mathcal{P}_{TM}.$$

Έστω ότι $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$, δηλαδή M αποδέχεται το w .

Τότε κατά τη λειτουργία της M' θα φθάσει στο βήμα της προσομοίωσης του M_L για κάθε είσοδο x , και επομένως M' θα αποδέχεται ακριβώς τις ίδιες συμβολοσειρές που αποδέχεται ο M_L . Άρα $L(M') = L_1$.

Εφόσον $L_1 \in \mathcal{P}$ από την επιλογή μας, συμπεραίνουμε ότι $\langle M' \rangle \in \mathcal{P}_{TM}$.

...

Θεώρημα Rice

Απόδειξη. (συνέχεια) **Ορθότητα**, δηλαδή ελέγχουμε ότι

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff \langle M' \rangle \in \mathcal{P}_{TM}.$$

Έστω ότι $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$, δηλαδή M δεν αποδέχεται το w .

Τότε στην εκτέλεση της M' πάνω σε οποιαδήποτε είσοδο x η προσομοίωση του M στο w δεν οδηγεί ποτέ σε αποδοχή, οπότε το πρόγραμμα ποτέ δεν προχωρά στο βήμα όπου προσομοιώνει τον M_L .

Συνεπώς M' δεν αποδέχεται καμία συμβολοσειρά, δηλαδή $L(M') = \emptyset$. Από την υπόθεση μας ότι $\emptyset \notin \mathcal{P}$, προκύπτει ότι $\langle M' \rangle \notin \mathcal{P}_{TM}$.

Άρα, η M' ικανοποιεί τη ζητούμενη ισοδυναμία και επομένως $A_{TM} \leq_m \mathcal{P}_{TM}$.

Τέλος, εφόσον η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη άρα και η $\mathcal{P}_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη. □

Θεώρημα Rice

■ Έστω $\mathcal{P}$ μια ιδιότητα, τότε η γλώσσα $\mathcal{P}_{TM}$ ορίζεται ως

$$\mathcal{P}_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}.$$

Θεώρημα. Αν P η οποία είναι μη-τετριμμένη ιδιότητα των γλωσσών των TM, τότε η $\mathcal{P}_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

■ Το Θεώρημα Rice είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο.

■ Πρέπει να ελέγχουμε μια ιδιότητα της γλώσσας της TM, **όχι** μια ιδιότητα της TM και τη συμπεριφορά της TM!

Θεώρημα Rice

π.χ., Έστω η γλώσσα

$$PALINDROMES_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \text{ TM και } L(M) \text{ περιέχει όλα τα παλίνδρομα} \}.$$

■ Η ιδιότητα που μας απασχολεί είναι η ακόλουθη,

$$\mathcal{P}_{PALINDROMES} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \text{ TM και } L(M) \text{ περιέχει όλα τα παλίνδρομα} \}.$$

Αυτή η κλάση είναι εξ ορισμού μια κλάση γλωσσών που αναγνωρίζονται TM.

■ Είναι μη-τετριμμένη, καθώς η γλώσσα που αναγνωρίσιμη γλώσσα όλων των συμβολοσειρών Σ^* είναι μέλος της κλάσης.

■ Ενώ η κενή γλώσσα, $L = \emptyset$ (η οποία είναι φυσικά αναγνωρίσιμη) δεν είναι μέλος της κλάσης.

■ Από το Θεώρημα Rice συμπεραίνουμε ότι είναι μη-διαγνώσιμη.



Θεώρημα Rice – Template

■ Έστω η γλώσσα L .

1. Αποδεικνύουμε ότι η L είναι ιδιότητα,

- Ελέγχουμε ότι η L αποτελείται από συμβολοσειρές της μορφής $\langle M \rangle$ όπου M TM.
- Ελέγουμε αν για κάθε δύο TM N, M τ.ω. $L(N) = L(M)$ ισχύει ότι $N \in L \iff M \in L$.

2. Αποδεικνύουμε ότι η L δεν είναι τετριμμένη,

- Δείχνουμε ότι υπάρχει TM M τ.ω. $\langle M \rangle \in L$.
- Δείχνουμε ότι υπάρχει TM M' τ.ω. $\langle M' \rangle \notin L$.

3. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Rice για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της μη-διαγνωσιμότητας της L .

Θεώρημα Rice

π.χ., Έστω η γλώσσα $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \emptyset\}$.

Αρχικά δείχνουμε ότι το E_{TM} είναι ιδιότητα αναγνωρίσιμων γλωσσών. Προφανώς, $E_{TM} \subseteq \{\langle M \rangle \mid M \text{ είναι TM}\}$.

Έστω τώρα ότι M, N είναι TM τέτοιες ώστε $L(M) = L(N)$. Αν $\langle M \rangle \in E_{TM}$, τότε $L(M) = \emptyset = L(N)$, οπότε $\langle N \rangle \in E_{TM}$.

Ομοίως, αν $\langle N \rangle \in E_{TM}$, βρίσκουμε ότι $\langle M \rangle \in E_{TM}$. Επομένως,

$$\langle M \rangle \in E_{TM} \iff \langle N \rangle \in E_{TM}.$$

...

Θεώρημα Rice

■ Τώρα θα αποδείξουμε ότι η E_{TM} είναι μη-τετριμμένη. Θεωρούμε τις TM M και M' .

$M =$ “Με είσοδο x , απορρίπτει.”

Δηλαδή, $L(M) = \emptyset \Rightarrow M \in E_{TM}$.

$M' =$ “Με είσοδο x , αποδέχεται.”

Δηλαδή, $L(M') = \Sigma^* \Rightarrow M' \notin E_{TM}$.

■ Άρα δεν είναι τετριμμένη ιδιότητα. Από το Θεώρημα Rice καταλήγουμε ότι η E_{TM} δεν είναι διαγνώσιμη. □

Θεώρημα Rice

Μερικά συχνά λάθη

■ Έστω το πρόβλημα απόφασης

‘Δοθείσας TM M , είναι η $L(M)$ αναγνωρίσιμη;’

Μερικοί θα πουν,

Η ιδιότητα ‘ L είναι αναγνωρίσιμη’ είναι μη-τετριμμένη. Άρα από το Θεώρημα Rice συμπεραίνουμε ότι η γλώσσα είναι μη-διαγνώσιμη.

Λάθος, η ιδιότητα είναι τετριμμένη.

Για την ακρίβεια υπάρχει μηχανή TM διάγνωσης,

$R = \text{“Με είσοδο } \langle M \rangle, \text{ αποδέχεται.”}$

Άρα η γλώσσα είναι διαγνώσιμη. □

Θεώρημα Rice

Μερικά συχνά λάθη

■ Θεωρούμε μια κατάσταση μιας TM συνηθισμένη αν δεν είναι η κατάσταση αποδοχής ή η κατάσταση απόρριψης. Έστω το πρόβλημα απόφασης

‘Δοθείσας TM M , υπάρχει συμβολοσειρά w τ.ω. η M επισκέπτεται κάθε συνηθισμένη κατάσταση κατά την διάρκεια του υπολογισμού;’

Μερικοί θα πουν,

Η ιδιότητα ‘για είσοδο w , η M επισκέπτεται κάθε συνηθισμένη κατάσταση κατά την διάρκεια του υπολογισμού’ είναι μη-τετριμμένη.

Άρα από το Θεώρημα Rice συμπεραίνουμε ότι η γλώσσα είναι μη-διαγνώσιμη.

Λάθος, αυτό δεν αποτελεί απόδειξη.

...

Θεώρημα Rice

Το πρόβλημα απόφασης εκφράζεται στην γλώσσα

$$TOUR_{TM} = \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} \text{για είσοδο } w, \text{ η } M \text{ επισκέπτεται κάθε συνηθισμένη κατάσταση} \\ \text{κατά την τετριμμένη διάρκεια του υπολογισμού} \end{array} \right\}.$$

Η συνθήκη **η M επισκέπτεται κάθε συνηθισμένη κατάσταση κατά την διάρκεια του υπολογισμού** αναφέρεται σε μια ιδιότητα της μηχανής **και όχι** της γλώσσας!

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε μια ιδιότητα που θα εφαρμοζόταν.

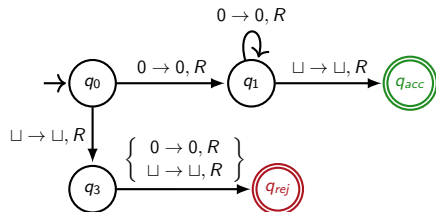
Έστω η γλώσσα $A = \{0^n \mid n > 0\}$.

Έστω δύο TM M, N τ.ω. $L(M) = L(N)$, αλλά $\langle M \rangle \notin TOUR_{TM}$ ενώ $\langle N \rangle \in TOUR_{TM}$.

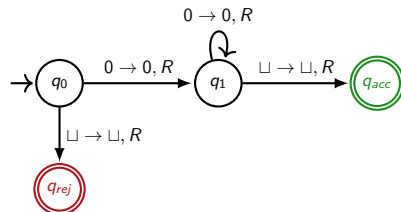
Τόσο η M όσο και η N αναγνωρίζουν την A .



Θεώρημα Rice



$\langle M \rangle \notin TOUR_{TM}$



$\langle N \rangle \in TOUR_{TM}$

■ Για να αποδείξουμε την μη-διαγνωσιμότητα της $TOUR_{TM}$ μπορούμε να κάνουμε αναγωγή από την A_{TM} .

Θεώρημα Rice

Μερικά συχνά λάθη

■ Έστω το πρόβλημα EQ_{TM} . Μερικοί θα πουν,

Η ιδιότητα ' $L(M) = L(N)$ ' είναι μη-τετριμμένη.

Άρα από το Θεώρημα Rice συμπεραίνουμε ότι η γλώσσα είναι μη-διαγνώσιμη.

Λάθος, για την ακρίβεια είναι κενό νοήματος.

Το πρόβλημα που τίθεται αφορά δύο γλώσσες, όχι μία.

■ Θα χρειαστούμε μια γενίκευση του θεωρήματος Rice σε ζεύγη γλωσσών αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η EQ_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη με αυτόν τον τρόπο.

Αναδρομή

Ένα παράδοξο

1. Οι ζωντανοί οργανισμοί είναι μηχανές [λειτουργούν με μηχανιστικό τρόπο]
2. Οι ζωντανοί οργανισμοί μπορούν να αυτοαναπαράγονται.
3. Οι μηχανές δεν μπορούν να αυτοαναπαράγονται.

Η 1. αποτελεί θεμελιώδες δόγμα της Βιολογίας. Η 2. είναι προφανής. Για την 3. ισχύει ο ακόλουθος συλλογισμός: "Έστω ένα αυτοματοποιημένο εργοστάσιο (E) που κατασκευάζει αυτοκίνητα (A). Θα ισχύει ότι Πολυπλοκότητα (E) > Πολυπλοκότητα (A) [Εφόσον μια μηχανή B κατασκευάζει μια μηχανή T θα πρέπει να είναι πιο πολύπλοκη]. Άρα, δεν μπορούν να υπάρχουν E που να κατασκευάζουν E. Συνεπώς, η αυτοαναπαραγωγή είναι αδύνατη."

Από 2. όμως οι ζωντανοί οργανισμοί αυτοαναπαράγονται?!

■ Υπάρχουν μηχανές που αυτοαναπαράγονται! [Αναδρομή]

Αναδρομή

■ Ένα Quine είναι ένα πρόγραμμα που, όταν εκτελείται, παράγει ως έξοδο τον ίδιο του τον πηγαίο κώδικα.

■ Μια άτυπη μέθοδος για να κατασκευάσουμε ένα quine είναι να γράψουμε ένα πρόγραμμα που ουσιαστικά δηλώνει:

Print the following string twice, the second time in quotes.

'Print the following string twice, the second time in quotes.'

■ Είναι ένα πρόγραμμα που “γνωρίζει” και αναπαράγει τον δικό του πηγαίο κώδικα.

■ Μπορούμε μάλιστα να το τροποποιήσουμε έτσι ώστε, αντί να εκτυπώνει τον πηγαίο κώδικα, να τον αποθηκεύει σε μια μεταβλητή.

■ Το πρόγραμμα αποκτά άμεση πρόσβαση στη δική του περιγραφή, η ίδια η συμβολοσειρά του πηγαίου κώδικα βρίσκεται πλέον σε θέση που μπορεί να χειριστεί!

Αναδρομή και Αυτοαναφορά

- Πώς μπορούμε να εκφράσουμε την αναδρομή;
- “ $\phi(\dots) = \dots \phi(\dots) \dots$ ”, θυμηθείτε τις παραγωγές $A \rightarrow \dots A \dots$ στις CFG.
- Οι TM δεν έχουν ονόματα για αυτοαναφορά.
- Μπορεί μια μηχανή να έχει πρόσβαση στην περιγραφή της;
- Μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτή την περιγραφή;

Αυτοαναφορά

Λήμμα Υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $q : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ που για κάθε λέξη w επιστρέφει ως $q(w)$ την περιγραφή της TM P_w η οποία εκτυπώνει την w και τερματίζει.

Απόδειξη. Για οποιαδήποτε συμβολοσειρά w , μπορούμε να κατασκευάσουμε μια TM που απλώς εκτυπώνει την w και τερματίζει. Αρκεί να έχει την w ενσωματωμένη σε κάποιον πίνακα, και να σβήνει την όποια είσοδο της. Μια TM S που κατασκευάζει μια τέτοια μηχανή, και άρα υπολογίζει την q είναι η εξής:

$S =$ “Για είσοδο w :

1. Κατασκευάζουμε την εξής TM P_w :

$P_w =$ “Για οποιαδήποτε είσοδο :

1. Σβήνουμε την είσοδο.

2. Γράφουμε στην ταινία την λέξη $\langle w \rangle$.

3. Τερματίζουμε.”

2. Επιστρέφουμε ως έξοδο τη συμβολοσειρά $\langle P_w \rangle$.”

Κατασκευή Αυτοαναφορικής TM

■ Θα κατασκευάσουμε την TM $AΥΤΟΓΡΑΦΟΣ$ σε δύο μέρη A , B . τ.ω.
 $\langle AΥΤΟΓΡΑΦΟΣ \rangle = \langle A, B \rangle$.

■ Η A θα πρέπει να εκτυπώνει την B , άρα $A = P_{\langle B \rangle}$, η οποία περιγράφεται από την συμβολοσειρά $q(\langle B \rangle)$.

■ Δεν μπορούμε να ορίσουμε την B βάσει της A [γιατί;]

■ Αλλά η B μπορεί να υπολογίσει A από την είσοδο της A .

■ Όταν η A τερματίζει, έχει στην ταινία της $\langle B \rangle$. Άρα η B λαμβάνει την δική της περιγραφή.

■ Η B μπορεί να υπολογίσει $q(\langle B \rangle) = A$.

■ Τέλος, η B συνδυάζει A και B και γράφει $\langle A, B \rangle = \langle AΥΤΟΓΡΑΦΟΣ \rangle$ στην ταινία.

Κατασκευή Αυτοαναφορικής TM

- Θα δώσουμε μια ακόμα διαισθητική εξήγηση της κατασκευής της αυτοαναφορικής TM
- Διαισθητικά, χωρίσαμε την διαδικασία σε δύο βήματα

Βήμα A: $x \leftarrow' \langle \text{Βήμα B} \rangle'$

Βήμα B: εκτύπωσε $\langle \text{Βήμα A} \rangle$
 εκτύπωσε $\langle \text{Βήμα B} \rangle$

- Κάθε βήμα είναι μια TM. Πρώτα εκτελούμε το Βήμα A και έπειτα το Βήμα B. Επομένως, στην ταινία θα έχουμε το εξής:

$\langle \text{Βήμα A} \rangle \langle \text{Βήμα B} \rangle \dots$

Κατασκευή Αυτοαναφορικής TM

- Έστω P_w η TM η οποία εκτυπώνει το w , π.χ. η P_{10110} εκτυπώνει το 10110 στην ταινία.
- $\langle P_w \rangle$ είναι η αναπαράσταση της TM P_w .
- Δοθείσας συμβολοσειράς w μπορούμε να κατασκευάσουμε TM η οποία να εκτυπώνει w .
- Επομένως, η προηγούμενη διαδικασία είναι σίγουρα υπολογίσιμη. Άρα, υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $q : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ τ.ω. $q(w) \rightarrow \langle P_w \rangle$.

w : δοθείσα συμβολοσειρά

$\langle P_w \rangle$: αναπαράσταση μιας TM η οποία
εκτυπώνει w στην ταινία.

Κατασκευή Αυτοαναφορικής ΤΜ

Βήμα Α. Γράφουμε μια εκτενή συμβολοσειρά στην ταινία, έστω x . Η συμβολοσειρά εντέλει θα είναι $\langle \text{Βήμα Β} \rangle$, αλλά δεν ξέρουμε την συμβολοσειρά ακόμα.

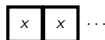
■ Δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε την κωδικοποίηση του βήματος Α.

■ Αν ξέρουμε την x , μπορούμε να ολοκληρώσουμε την κωδικοποίηση του βήματος Α.
[χρησιμοποιώντας την $q(x)$]

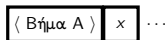
Κατασκευή Αυτοαναφορικής TM

Βήμα B. Όταν ξεκινήσει, η ταινία θα περιέχει την συμβολοσειρά x .

- Κάνει ένα αντίγραφο του x .



- Χρησιμοποιεί την q ως υπορουτίνα και υπολογίζει το $q(x)$ [$q(x) = \langle \text{Βήμα A} \rangle$].



- Αν x η περιγραφή του βήματος B, τότε $x = \langle \text{Βήμα B} \rangle$.



- Κωδικοποιήσαμε το Βήμα B. Άρα ξέρουμε το $\langle \text{Βήμα B} \rangle$. Επιστρέφουμε στο Βήμα A και ολοκληρώνουμε την κωδικοποίηση του.

Κατασκευή Αυτοαναφορικής TM

■ Είναι η γλώσσα

$$ΑΥΤΟΓΡΑΦΟΣ = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ TM εκτυπώνει τη δική της περιγραφή } \langle M \rangle \}$$

διαγνώσιμη;

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγή από τη A_{TM} . Έστω ότι $ΑΥΤΟΓΡΑΦΟΣ$ διαγνώσιμη, τότε υπάρχει διαγνώστης R για την $ΑΥΤΟΓΡΑΦΟΣ$. Έστω ότι έχουμε τη μηχανή M και την είσοδο w . Θα κατασκευάσουμε TM S ως εξής:

$S =$ “Για κάθε είσοδο :

1. Λαμβάνει την περιγραφή $\langle S' \rangle$:
2. Προσομοιώνει την M σε είσοδο $\langle w \rangle$.
3. Αν η M αποδέχεται w , τότε S' εκτυπώνει $\langle S' \rangle$ και τερματίζει.
4. Αν η M αποδρρίπτει w , τότε S' διαγράφει $\langle S' \rangle$ και τερματίζει.”

Ορθότητα,

$$M \text{ αποδέχεται } w \iff S' \text{ εκτυπώνει } \langle S' \rangle. \square$$

Κατασκευή Αυτοαναφορικής TM

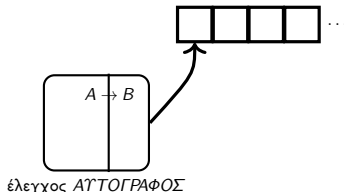
■ Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$$A = P_{\langle B \rangle}.$$

$B =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M ένα τμήμα μιας TM :

1. Υπολογίζουμε την περιγραφή $q(\langle M \rangle)$.
2. Συνδυάζουμε το αποτέλεσμα με $\langle M \rangle$ μέσω μιας TM.
3. Εκτυπώνουμε την περιγραφή αυτής της TM και τερματίζουμε.”

■ Ο έλεγχος ξεκινάει από το A , παράγει το B και παραδίδει τον έλεγχο στο B .



Κατασκευή Αυτοαναφορικής TM

Διαισθητικά, υλοποιήσαμε το

Γράψε αυτήν την πρόταση

Ως εξής,

Γράψε δύο αντίγραφα της επόμενης πρότασης, το δεύτερο σε εισαγωγικά.

“ Γράψε δύο αντίγραφα της επόμενης πρότασης, το δεύτερο σε εισαγωγικά.”

■ Η δεύτερη γραμμή είναι μια περιγραφή της πρώτης. Παρέχει στο πρώτο κομμάτι (το “πρόγραμμα”) μια αναπαράσταση του εαυτού του, έτσι ώστε το πρόγραμμα να το χρησιμοποιήσει.

Αυτο-παραγωγή

■ Η αυτο-παραγωγή αναφέρεται στην ικανότητα μιας ΤΜ να παράγει ένα αντίγραφο του εαυτού της ή ένα ισοδύναμο πρόγραμμα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της αυτοαναφοράς.

π.χ., Ένα πρόγραμμα που εκτελείται και εκτυπώνει τον δικό του κώδικα.

■ Συνδέεται στενά με έννοιες όπως το Θεώρημα του Gödel και το πρόβλημα τερματισμού του Turing.

Αυτο-παραγωγή

Ένα Quine είναι ένα πρόγραμμα το οποίο, χωρίς να δέχεται είσοδο, εκτυπώνει τον ίδιο του τον κώδικα ως έξοδο. [πηγή, Wikipedia]

```
# Example A. chr(39) == "'".
a = ' a = {}{}{}; print(a.format(chr(39), a, chr(39)))';
print(a.format(chr(39), a, chr(39)))
```

Αυτός ο κώδικας είναι ένα απλό παράδειγμα αυτο-παραγωγής.

Σημασία αυτο-παραγωγής

- Η αυτο-παραγωγή είναι θεμελιώδης στην θεωρία της υπολογισσιμότητας.
- Συνδέεται με σημαντικά θεωρήματα όπως το Θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel.
- Έχει πρακτικές εφαρμογές στην ασφάλεια λογισμικού και την ανάλυση προγραμμάτων.

Θεώρημα Αναδρομής

■ Σε μια ΤΜ μπορούμε να μετρήσουμε τον αριθμό των καταστάσεων, να ελέγξουμε αν η κατάσταση αποδοχής είναι προσβάσιμη, αν η ΤΜ αποδέχεται μια συμβολοσειρά w , κτλ.

Προσέγγιση. Κατασκευάζουμε μια ΤΜ να κάνει την εργασία που θέλουμε, π.χ., $t(\langle M \rangle, w)$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ΤΜ η οποία να τρέχει τον εαυτό της, π.χ. $t(\langle t \rangle, w)$ [αρκεί να έχει πρόσβαση στην περιγραφή της] $\Rightarrow$ αυτοαναφορά.

■ Έστω ότι διαθέτουμε μια ΤΜ M η οποία υπολογίζει κάποια συνάρτηση από Σ σε Σ .

■ Φυσικά, μπορούμε να εκτελέσουμε $M(\langle M \rangle)$, δηλαδή να τρέξουμε τον κώδικα M πάνω στην ίδια του την περιγραφή, για να δούμε το αποτέλεσμα του.

■ Το θεώρημα αναδρομής μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια ΤΜ Q τ.ω. $Q(\varepsilon)$ να παράγει το ίδιο αποτέλεσμα με $M(\langle Q \rangle)$. Με άλλα λόγια, η Q εκτελεί την υπορουτίνα M πάνω στον δικό του πηγαίο κώδικα $\langle Q \rangle$, και όχι απλώς στον κώδικα της M .

Θεώρημα Αναδρομής

■ Το θεώρημα αναδρομής μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια ΤΜ Q τ.ω. $Q(\varepsilon)$ να παράγει το ίδιο αποτέλεσμα με $M(\langle Q \rangle)$. Με άλλα λόγια, η Q εκτελεί την υπορουτίνα M πάνω στον δικό του πηγαίο κώδικα $\langle Q \rangle$, και όχι απλώς στον κώδικα της M .

Προσέγγιση. Quine, αυτοαναφορά. [“πρόσβαση” στην ίδια της την περιγραφή, αξιοποίηση μέσα στη ροή εκτέλεσης]

■ Δεν περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου η M δέχεται μία μόνο συμβολοσειρά ως είσοδο.

■ Υποθέτουμε πλέον ότι η M λαμβάνει δύο συμβολοσειρές και υπολογίζει κάποια συνάρτηση από $\Sigma^* \times \Sigma^*$ σε Σ^* .

■ Σε αυτήν την περίπτωση κατασκευάζουμε μια τροποποιημένη εκδοχή της Q τ.ω. για κάθε είσοδο w , η έξοδος του $Q(w)$ να είναι ίση με την έξοδο του $M(\langle Q \rangle, w)$.

Θεώρημα Αναδρομής

■ Το θεώρημα αναδρομής μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια ΤΜ Q τ.ω. $Q(\varepsilon)$ να παράγει το ίδιο αποτέλεσμα με $M(\langle Q \rangle)$. Με άλλα λόγια, η Q εκτελεί την υπορουτίνα M πάνω στον δικό του πηγαίο κώδικα $\langle Q \rangle$, και όχι απλώς στον κώδικα της M .

Προσέγγιση. Quine, αυτοαναφορά. [“πρόσβαση” στην ίδια της την περιγραφή, αξιοποίηση μέσα στη ροή εκτέλεσης]

■ Με άλλα λόγια, η Q εξακολουθεί να τρέχει την M χρησιμοποιώντας ως μία από τις εισόδους την ίδια του την περιγραφή, αλλά πλέον η M λαμβάνει και μια επιπλέον είσοδο w , η οποία μπορεί να μεταφέρει αυθαίρετη εξωτερική πληροφορία.

■ Αυτή η γενικευμένη μορφή είναι και η πλέον χρήσιμη, ειδικά όταν η Q πρόκειται να λειτουργήσει ως “σταθερό σημείο” υπολογιστικών διαδικασιών που συνδυάζουν εσωτερική αυτοαναφορά με εξωτερικές παραμέτρους.