



ΗΥ - 280 Θεωρία Υπολογισμού

Διάλεξη 14

Κωνσταντίνος Βάρσος

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών – Πανεπιστήμιο Κρήτης

Χειμερινό εξάμηνο 2025 - 26

Υπολογισιμότητα

Τι είδαμε στην Διάλεξη 13

- Αναδρομικές και Απαριθμήσιμα Αναδρομικές γλώσσες.
- Ιδιότητες αναγνωρίσιμων και διαγνώσιμων γλωσσών.
- Θέση Church-Turing.
- Επιλύσιμα Προβλήματα.

Μηχανές Turing

- Κάθε μηχανή Turing μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια διακριτή και πεπερασμένη συμβολοσειρά 0 και 1.
- Υπάρχουν αριθμήσιμου πλήθους μηχανές Turing.
- Ειδικές μηχανές Turing: μηχανές αντιγραφής, μηχανές ταιριάσματος, μηχανές αντικατάστασης.
- Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι χρειαζόμαστε διαφορετικές TM για διαφορετικές γλώσσες.

Καθολική Μηχανή Turing

■ Μια μηχανή Turing η οποία μπορεί να υπολογίσει οτιδήποτε υπολογίσιμο!

■ Στην **είσοδο** θα παίρνει την περιγραφή μιας μηχανής Turing M και συμβολοσειρά/ες για την M . Ως **έξοδο** θα δίνει τα αποτελέσματα της εκτέλεσης $M(w)$. Δηλαδή προσομοιώνει την M .

■ Η μηχανή Turing U λέγεται **καθολική** μηχανή Turing εάν κατά την προσμείωση οποιασδήποτε TM M δίνει τα ίδια αποτελέσματα με την M .

■ Δηλαδή, κατά την προσομοίωση μιας TM M , για είσοδο w ,

$$\eta \ U \left\{ \begin{array}{c} \text{αποδέχεται} \\ \text{απορρίπτει} \\ \text{λειτουργεί ατέρμονα} \end{array} \right\} \text{ ανν } \eta \ M \left\{ \begin{array}{c} \text{αποδέχεται} \\ \text{απορρίπτει} \\ \text{λειτουργεί ατέρμονα} \end{array} \right\}$$

για είσοδο w .

Καθολική Μηχανή Turing

Λήμμα. Αν γλώσσα L πάνω στο αλφάβητο $\{0, 1\}$ διαγιγνώσκεται από κάποια ΤΜ N , τότε υπάρχει μια ΤΜ M 1-ταινίας η οποία διαγιγνώσκει την L τ.ω.

- 1 $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$
- 2 Καταστάσεις αριθμημένες σύμφωνα με $\{1, \dots, n\}$
- 3 q_1 η μοναδική αρχική κατάσταση
- 4 q_2 η μοναδική κατάσταση τερματισμού-αποδοχής.
- 5 q_3 η μοναδική κατάσταση τερματισμού-απόρριψης.

■ Συνεπώς, για να αναπαραστήσουμε μια ΤΜ, χρειαζόμαστε μόνο μια λίστα με τις μεταβάσεις. Οτιδήποτε άλλο το λαμβάνουμε από το προηγούμενο Λήμμα.

Καθολική Μηχανή Turing

π.χ., Έστω η TM που αναγνωρίζει την γλώσσα $\{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$

Κωδικοποίηση εισόδου:

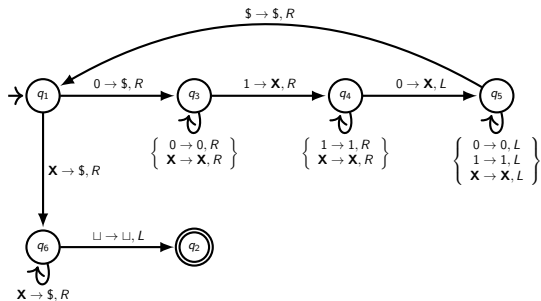
$\langle 0 \rangle = 001$

$\langle 1 \rangle = 010$

$\langle \$ \rangle = 011$

$\langle X \rangle = 100$

$\langle \sqcup \rangle = 000$



■ $\langle 001100 \rangle = [001 \cdot 001 \cdot 010 \cdot 010 \cdot 001 \cdot 001]$.

Καθολική Μηχανή Turing

π.χ., Έστω η TM που αναγνωρίζει την γλώσσα $\{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$

Κωδικοποίηση καταστάσεων:

$\langle q_1 \rangle = 001$

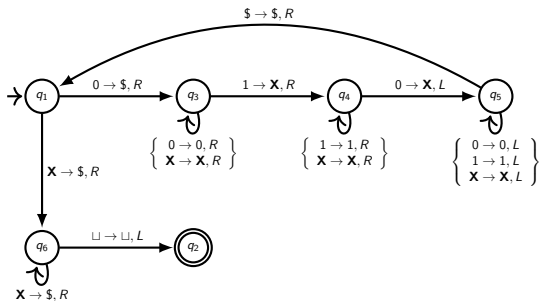
$\langle q_3 \rangle = 010$

$\langle q_4 \rangle = 011$

$\langle q_5 \rangle = 100$

$\langle q_6 \rangle = 101$

$\langle q_2 \rangle = 110$



Καθολική Μηχανή Turing

π.χ., Έστω η TM που αναγνωρίζει την γλώσσα $\{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$

Κωδικοποίηση κατεύθυνσης:

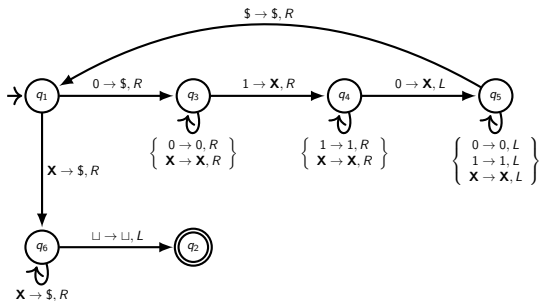
$$[R, L] = [0, 1]$$

Κωδικοποίηση μεταβάσεων:

$$\delta(q_5, \$) = (q_1, \$, R)$$

γίνεται

$$[100 \cdot 011 \mid 001 \cdot 011 \cdot 1]$$



Καθολική Μηχανή Turing

■ Τώρα που μπορούμε να κωδικοποιήσουμε μηχανές Turing, θέλουμε να κατασκευάσουμε μια μηχανή Turing τ.ω.,

$$L(U) = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ TM και αποδέχεται την } w\}.$$

■ Η U είναι ένας υπολογιστής προγραμμάτων. Διαβάζει $\langle M \rangle$ και το εκτελεί σε δεδομένα w .

■ Η U προσομοιώνει την εκτέλεση της M σε w .

■ Η $\langle M, w \rangle$ είναι το μοναδική συμβολοσειρά που κωδικοποιεί τόσο την M όσο και την w .

$$L(U) = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ TM και αποδέχεται την } w\}.$$

Καθολική Μηχανή Turing

■ Προτάθηκε από τον A. Turing.

■ Η U περιέχει τρεις ταινίες,

1η Ταινία εργασίας, περιέχει κωδικοποιημένο το περιεχόμενο της ταινίας της M , $\langle w \rangle$.

2η Κωδικοποιημένη η τρέχουσα κατάσταση της M , $\langle q \rangle$.

3η Κωδικοποίηση της $\langle M \rangle$.

■ Δηλαδή, η U είναι μια **προγραμματιζόμενη μηχανή**.

■ Η καθολική μηχανή U είναι ισοδύναμη με μια TM M . [ίδια υπολογιστική ισχύ].

■ Η διαφορά είναι ότι η U δεν έχει ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα ενσωματωμένο στη λειτουργία της.

Καθολική Μηχανή Turing

Θεώρημα. Η καθολική μηχανή U είναι ισοδύναμη με μια TM M .

Γενική Ιδέα. Για κάθε δεδομένη διαμόρφωση της μηχανής M , η U εκτελεί την ακόλουθη διαδικασία:

- Ξεκινώντας από το αριστερότερο κελί των 2., 3., σαρώνει την ταινία μέχρι να βρει την πρώτη κατάσταση που **δεν** είναι κατάσταση απόρριψης.
- Η U σαρώνει επίσης την ταινία εργασίας 1. για να εντοπίσει τον κανόνα μετάβασης που ταιριάζει με την υποσυμβολοσειρά που βρέθηκε στην ταινία εισόδου.
- Με βάση την συνάρτηση μετάβασης, η U εγγράφει στη θέση της 1ης ταινίας το δεξί μέλος της μετάβασης.
- Μετακινεί την κεφαλή αριστερά ή δεξιά, σύμφωνα με τη διεύθυνση της μετάβασης.

Μη-αναγνωρίσιμες γλώσσες

Αρχικά θέτουμε μερικές χρήσιμες συμβάσεις.

- Κάθε TM έχει μια πεπερασμένη περιγραφή, κατά τα γνωστά $\langle M \rangle$.
- Η $\langle M \rangle$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια πεπερασμένη συμβολοσειρά πάνω στο σύνολο $\{0, 1\}$.

Σχόλιο. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους. Αν η περιγραφή περιέχει k διαφορετικά σύμβολα, τότε για κάθε σύμβολο αντιστοιχούμε μια συμβολοσειρά πάνω στο $\{0, 1\}$ μήκους $\lceil \log k \rceil$. Έπειτα, αντικαθιστούμε κάθε σύμβολο με την αντίστοιχη δυαδική συμβολοσειρά. Έτσι, παίρνουμε μια συμβολοσειρά πάνω στο $\{0, 1\}$ για $\langle M \rangle$.

Μη-αναγνωρίσιμες γλώσσες

Αρχικά θέτουμε μερικές χρήσιμες συμβάσεις.

■ Βάσει του παραπάνω, αντιστοιχίζουμε έναν φυσικό αριθμό σε κάθε δυαδική συμβολοσειρά με τον εξής τρόπο: προσθέτουμε ένα 1 στην αρχή της συμβολοσειράς (για να διακρίνουμε τα προπορευόμενα 0) και την μετατρέπουμε σε δεκαδικό αριθμό.

π.χ., για την συμβολοσειρά 0110, παίρνουμε την 10110. Η δεκαδική της αναπράσταση είναι 22. Άρα, $0110 \rightsquigarrow 22$ [με αυτό τον τρόπο δεν παραλείπονται τα αρχικά μηδενικά]

■ Αν ένας φυσικός αριθμός δεν αντιστοιχεί σε καμία TM, τότε τον αντιστοιχίζουμε σε κάποια σταθερή TM (π.χ., που αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές).

■ Άρα, κάθε φυσικός αριθμός αντιστοιχεί σε κάποια TM και $\forall$ TM $\exists$ τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός που την αντιπροσωπεύει. Για $i \geq 1$, έστω M_i η i -η TM. Αυτό μας δίνει μια συνάρτηση επί από τους $\mathbb{N}$ στο σύνολο όλων των TM.

Μη-αναγνωρίσιμες γλώσσες

Θεώρημα. Υπάρχουν μη-αναγνωρίσιμες γλώσσες.

Απόδειξη. [Α τρόπος] Έστω $s_1, s_2, \dots$ η λεξικογραφική διάταξη όλων των δυαδικών συμβολοσειρών. Ορίζουμε τη γλώσσα

$$L_d = \{s_i \mid M_i \text{ δεν αποδέχεται την } s_i\}.$$

Υποθέτουμε ότι η L_d είναι αναγνωρίσιμη. Τότε υπάρχει μία TM M_j τέτοια ώστε $L_d = L(M_j)$ (δηλαδή, η M_j είναι η j -η TM στη σειρά που περιγράψαμε). Τώρα ισχύει ότι:

$$M_j \text{ αποδέχεται } s_j \iff s_j \in L(M_j) \iff s_j \in L_d \iff M_j \text{ δεν αποδέχεται } s_j.$$

Επομένως, έχουμε αντίφαση και το L_d δεν είναι αναγνωρίσιμο από TM. □

Μη-αναγνωρίσιμες γλώσσες

Θεώρημα. Υπάρχουν μη-αναγνωρίσιμες γλώσσες.

Απόδειξη. [B τρόπος] Όπως δείξαμε το σύνολο των TM είναι αριθμήσιμο. Έστω $\mathcal{L}$ το σύνολο των γλωσσών επί αλφαβήτου Σ και $\mathcal{B}$ το σύνολο όλων των άπειρων δυαδικών ακολουθιών [πληθικότητα: $\aleph_1$].

$\forall A \in \mathcal{L}$ ορίζουμε μια ακολουθία $\chi_A \in \mathcal{B}$, τ.ω. για $\Sigma^* = \{s_1, s_2, \dots\}$, το i -στό στοιχείο της χ_A είναι το 1 αν $s_i \in A$ και 0 αλλιώς.

π.χ., αν A η γλώσσα όλων των συμβολοσειρών στο $\{0, 1\}$ που ξεκινούν με 0, τότε η χ_A είναι

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^* & = & \{ \varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots \} \\ A & = & \{ 0, 00, 01, 000, \dots \} \\ \chi_A & = & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{array} \end{array}$$

Άρα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{B}$ (η χ_A) και το $\mathcal{B}$ είναι μη-αριθμήσιμο. Συνεπώς, και το $\mathcal{L}$ είναι μη-αριθμήσιμο. $\square$

Το Πρόβλημα Αποδοχής

- Είναι κάθε αναγνωρίσιμη γλώσσα διαγνώσιμη ?

Το Πρόβλημα Αποδοχής

Δοθείσας μια TM M και μιας συμβολοσειράς εισόδου w .

Γίνεται αποδεκτή η w από την M ;

Τυπικά,

$$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid \text{η } TM \text{ } M \text{ αποδέχεται την συμβολοσειρά } w \}$$

Το Πρόβλημα Αποδοχής

■ Έστω η γλώσσα $A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid \text{η TM } M \text{ αποδέχεται την συμβολοσειρά } w\}$.

Θεώρημα. Η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη.

Απόδειξη. (Ιδέα) Σημειώνουμε την A_{TM} ως έναν πίνακα $\Sigma^* \times \Sigma^*$ ο οποίος δίνει τις ακόλουθες απαντήσεις

	w_0	w_1	w_2	w_3	
M_0	NAI	OXI	NAI	NAI	...
M_1	NAI	OXI	OXI	NAI	...
M_2	NAI	NAI	NAI	NAI	...
M_3	OXI	OXI	OXI	OXI	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Κάθε κελί του πίνακα σημαίνει $(M_i, w_j) \rightarrow \text{NAI}$ αν η M_i αποδέχεται την w_j .

Έστω ότι η A_{TM} είναι διαγνώσιμη.

...

Το Πρόβλημα Αποδοχής

(συνέχεια). Τότε υπάρχει μία ΤΜ που τερματίζει, H , η οποία για είσοδο $\langle M, w \rangle$, αποδέχεται αν η M αποδέχεται την w , και απορρίπτει αν η M δεν αποδέχεται την w .

Χρησιμοποιώντας την H , κατασκευάζουμε μία άλλη ΤΜ, D , για να εξετάσουμε πως συμπεριφέρεται η M στην ίδια της την περιγραφή $\langle M \rangle$. Αυτό το επιτυγχάνουμε ως εξής:

$D =$ “Για είσοδο $\langle M \rangle$:

1. Προσομοίωσε την H με είσοδο $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.
2. Αν η H απορρίψει, **αποδέχεται**.
3. Αν η H αποδέχεται, **απορρίπτει**.”

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	...
M_1	NAI	OXI	OXI	NAI	...
M_2	NAI	OXI	NAI	OXI	...
M_3	OXI	NAI	NAI	NAI	...
M_4	OXI	OXI	NAI	OXI	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Άρα και η γλώσσα $L_D = \{w_i \mid M_i \text{ δεν αποδέχεται } w_i\}$ και το συμπλήρωμα της $\bar{L}_D = \{w_i \mid M_i \text{ αποδέχεται } w_i\}$ θα ήταν διαγνώσιμες.

...

Το Πρόβλημα Αποδοχής

(συνέχεια). Άρα και η γλώσσα $L_D = \{w_i \mid M_i \text{ δεν αποδέχεται } w_i\}$, και το συμπλήρωμα της $\bar{L}_D = \{w_i \mid M_i \text{ αποδέχεται } w_i\}$ θα ήταν διαγνώσιμες

Καθώς η ΤΜ H τερματίζει και η D θα τερματίζει. Όταν η μηχανή D έχει είσοδο $\langle D \rangle$ έχουμε,

$$D \text{ αποδέχεται } \langle D \rangle \iff H \text{ απορρίπτει } \langle D, \langle D \rangle \rangle \iff D \text{ δεν αποδέχεται } \langle D \rangle$$

Άτοπο. Άρα, το A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη.



Το Πρόβλημα Αποδοχής

Σχόλια. Η συμπεριφορά των μηχανών στην προηγούμενη απόδειξη είναι η εξής:

- H αποδέχεται την $\langle M, w \rangle$ ανν η M αποδέχεται την $\langle w \rangle$.
- D απορρίπτει την $\langle M \rangle$ ανν η M αποδέχεται την $\langle M \rangle$.
- D απορρίπτει την $\langle D \rangle$ ανν η D αποδέχεται την $\langle D \rangle$.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	...
M_1	rej	rej	acc	acc	...
M_2	acc	rej	acc	rej	...
M_3	rej	acc	acc	acc	...
M_4	rej	rej	acc	rej	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Το Πρόβλημα Αποδοχής

Σχόλια. Η συμπεριφορά των μηχανών στην προηγούμενη απόδειξη είναι η εξής:

- H αποδέχεται την $\langle M, w \rangle$ ανν η M αποδέχεται την $\langle w \rangle$.
- D απορρίπτει την $\langle M \rangle$ ανν η M αποδέχεται την $\langle M \rangle$.
- D απορρίπτει την $\langle D \rangle$ ανν η D αποδέχεται την $\langle D \rangle$.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	...	$\langle D \rangle$
M_1	rej	rej	acc	acc	...	
M_2	acc	rej	acc	rej	...	
M_3	rej	acc	acc	acc	...	$\vdots$
M_4	rej	rej	acc	rej	...	
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$	
D	acc	acc	rej	acc	...	;

Το Πρόβλημα Αποδοχής

■ Η γλώσσα A_{TM} είναι αναγνωρίσιμη. [TM για είσοδο $\langle M, w \rangle$]

Θεώρημα. Η γλώσσα $\overline{A_{TM}}$ δεν είναι αναγνωρίσιμη

Απόδειξη. Έστω ότι η γλώσσα $\overline{A_{TM}}$ είναι αναγνωρίσιμη.

Εφόσον και η A_{TM} αναγνωρίσιμη, τότε θα έπρεπε η A_{TM} να είναι διαγνώσιμη.

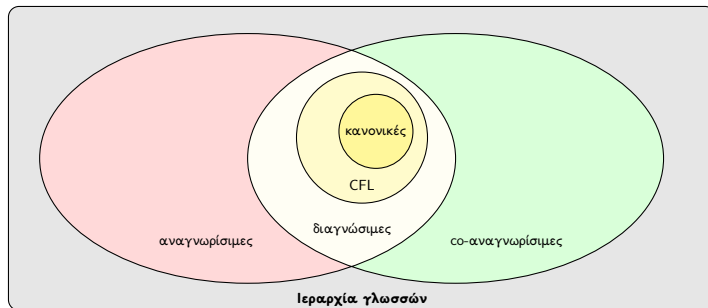
Αυτό όμως δεν ισχύει, άρα $\overline{A_{TM}}$ είναι μη-αναγνωρίσιμη. □

Co-αναγνωρίσιμες γλώσσες

■ Έστω τώρα το σύνολο των γλωσσών

$$\{L \mid \bar{L} \text{ είναι T-αναγνωρίσιμη}\}$$

Ονομάζεται σύνολο των co-Turing αναγνωρίσιμων γλωσσών [co-αναγνωρίσιμων εν'συντομία]



Το Πρόβλημα Τερματισμού

Το Πρόβλημα Τερματισμού

Δοθείσας μια TM M και μιας συμβολοσειράς εισόδου w .

Τερματίζει η M για είσοδο w ;

Τυπικά,

$$HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ τερματίζει για είσοδο } w \}$$

Το Πρόβλημα Τερματισμού

■ Έστω η γλώσσα $HALT_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ τερματίζει για είσοδο } w\}$

Θεώρημα. Η $HALT_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Έστω ότι η $HALT_{TM}$ είναι διαγνώσιμη. Άρα υπάρχει TM N η οποία να διαγιγνώσκει για την $HALT_{TM}$. Θα κατασκευάσουμε μια TM S η οποία να διαγιγνώσκει για την A_{TM} .

$S =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$:

1. Χρησιμοποιούμε την N ώστε να ελέγξουμε αν η M τερματίζει για είσοδο w .

Αν όχι, **απορρίπτουμε**.

2. Προσομοιώνουμε την M για w έως ότου τερματίσει.

3. Αν η M αποδεχθεί, τότε **αποδεχόμαστε**.

Αν η M απορρίψει, τότε **απορρίπτουμε**.”

Η S διαγιγνώσκει την A_{TM} , άτοπο. Άρα, η $HALT_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη. □

Μέθοδος Αναγωγής

Σχόλιο. Η προηγούμενη απόδειξη, εκτός του αποτελέσματος, δίνει και μια μεθοδολογία για την απόδειξη μη-διαγνώσιμων γλωσσών, η οποία και λέγεται **μέθοδος αναγωγής**.

■ (Διαισθητικά) Στην μέθοδο αναγωγής, αν ξέρουμε ότι κάποιο πρόβλημα είναι μη-επιλύσιμο μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε την μη-επιλυσιμότητα άλλων προβλημάτων.

■ Λέμε ότι το πρόβλημα A **ανάγεται** στο πρόβλημα B , αν ο διαγνώστης για το B μπορεί να χρησιμοποιηθεί (αλγοριθμικά) για τον διαγνώστη του A , $A \leq B$.

π.χ. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ανάγεται στον υπολογισμό του μήκους των πλευρών του. Το A_{NFA} ανάγεται στο A_{DFA} , κτλ.

Χρησιμοποιούμε τις εξής συνεπαγωγές:

- Αν B λύνεται εύκολα, τότε και το A λύνεται εύκολα.
- Αν A λύνεται δύσκολα, τότε και το B λύνεται δύσκολα.

Μη επιλύσιμα προβλήματα

■ Χρησιμοποιούμε ότι κάποιο γνωστό μη-διαγνώσιμη γλώσσες, π.χ, A_{TM} , $HALT_{TM}$, είναι μη-διαγνώσιμη ώστε να δείξουμε ότι και άλλα προβλήματα είναι μη-διαγνώσιμα.

■ Έστω η γλώσσα $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } L(M) = \emptyset\}$. [κενότητα TM]

Θεώρημα. Η γλώσσα E_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το A_{TM} ανάγεται στο E_{TM} .

Υποθέτουμε ότι E_{TM} είναι διαγνώσιμη, θα καταλήξουμε ότι και A_{TM} διαγνώσιμη.

...

Μη επιλύσιμα προβλήματα

Απόδειξη. (συνέχεια) Έστω ΤΜ R η οποία διαγιγνώσκει το E_{TM} . Κατασκευάζουμε ΤΜ S η οποία να διαγιγνώσκει για το A_{TM} ως εξής:

$S =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$:

1. Μετασχηματίζει την M σε νέα ΤΜ M_w η οποία με την σειρά της έχει τις εξής λειτουργίες. Σε είσοδο x .
 1. Αν $x \neq w$, **απορρίπτει**.
 2. Αλλιώς τρέχει M με είσοδο w .
 3. **Αποδέχεται**, αν η M αποδέχεται.
2. Βάσει της R ελέγχουμε αν $L(M_w) = \emptyset$.
3. Αν ΝΑΙ (M απορρίπτει w), **απορρίπτει**.
Αν ΟΧΙ (M δέχεται w), **αποδέχεται**.”

...

Μη επιλύσιμα προβλήματα

Απόδειξη. (συνέχεια) Έτσι λοιπόν, εάν όντως η R διαγιγνώσκει για την E_{TM} , τότε και η S θα πρέπει να διαγιγνώσκει για την A_{TM} . [αναγωγή]. Άτοπο.

Η A_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη, άρα και η E_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη. $\square$

Σχόλιο. Η M_w δουλεύει όπως και η M , εκτός του ότι πάντοτε απορρίπτει συμβολοσειρές x τ.ω. $x \neq w$. Επομένως,

$$L(M_w) = \begin{cases} \{w\}, & \text{αν } M \text{ αποδέχεται } x \\ \emptyset, & \text{αν } M \text{ απορρίπτει } x. \end{cases}$$

Μη επιλύσιμα προβλήματα

■ Χρησιμοποιούμε ότι κάποιο γνωστό μη-διαγνώσιμη γλώσσες, π.χ, A_{TM} , $HALT_{TM}$, είναι μη-διαγνώσιμη ώστε να δείξουμε ότι και άλλα προβλήματα είναι μη-διαγνώσιμα.

■ Έστω η γλώσσα $B_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και } B \text{ αποδέχεται την } \varepsilon\}$.

Θεώρημα. Η γλώσσα B_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το $HALT_{TM}$ ανάγεται στο B_{TM} .

Υποθέτουμε ότι B_{TM} είναι διαγνώσιμη, θα καταλήξουμε ότι και $HALT_{TM}$ διαγνώσιμη.

...

Μη επιλύσιμα προβλήματα

Απόδειξη. (συνέχεια) Έστω TM T η οποία διαγιγνώσκει το B_{TM} . Κατασκευάζουμε TM Q η οποία να διαγιγνώσκει για το $HALT_{TM}$ ως εξής:

$Q =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$:

1. Μετασχηματίζει την M σε νέα TM M_w για την οποία γράφει w στην άδεια ταινία και έπειτα εκτελεί την M .
2. Εκτελεί την T με είσοδο $\langle M_w \rangle$.’

Η T τερματίζει για $\langle M_w \rangle$ ανν M_w τερματίζει για ε ανν M τερματίζει για w . Άτοπο, καθώς η $HALT_{TM}$ μη-διαγνώσιμη. $\square$

Μη επιλύσιμα προβλήματα

■ Έστω το πρόβλημα του προσδιορισμού εάν μια TM έχει κάποιο ισοδύναμο FA, δηλαδή εάν αναγνωρίζει κάποια κανονική γλώσσα. Έχουμε,

$$K_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM και η } L(M) \text{ κανονική}\}$$

Θεώρημα. Η γλώσσα K_{TM} είναι μη-διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Θα αναγάγουμε στο πρόβλημα A_{TM} .

Υποθέτουμε ότι K_{TM} είναι διαγνώσιμη, θα καταλήξουμε ότι και A_{TM} διαγνώσιμη.

Έστω R η TM που διαγιγνώσκει την K_{TM} , θα κατασκευάσουμε μια TM S η οποία να διαγιγνώσκει την A_{TM} .

...

Μη επιλύσιμα προβλήματα

Απόδειξη. (συνέχεια) Η ιδέα είναι να διαχωρίσουμε τις κανονικές από τις μη-κανονικές γλώσσες.

Θα κατασκευάσουμε μια καινούργια ΤΜ M_w η οποία να αναγνωρίζει τη μη-κανονική γλώσσα $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ όταν η M δεν αποδέχεται την w .

Προς αυτό, η S σχεδιάζει την M_w ώστε να αποδέχεται αυτομάτως όλες τις συμβολοσειρές που ανήκουν στην $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Οι υπόλοιπες συμβολοσειρές γίνονται αποδεκτές μόνο εάν η M αποδέχεται την w .

...

Μη επιλύσιμα προβλήματα

Απόδειξη. (συνέχεια) Κατασκευάζουμε την S ως εξής:

$S =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$:

1. Κατασκευάζουμε νέα TM M_w ως εξής:

$M_w =$ Για είσοδο w :

1. Εάν x είναι της μορφής $0^n 1^n$, **αποδέχεται**.
 2. Εάν x δεν είναι της μορφής $0^n 1^n$, εκτελούμε την M για w .
 3. **Αποδέχεται**, αν η M αποδέχεται.
2. Εκτελούμε την R για $\langle M_w \rangle$.
 3. Εάν η R αποδέχεται, **αποδεχόμαστε**.
Εάν η R απορρίπτει, **απορρίπτουμε**.”

□

Μη επιλύσιμα προβλήματα

- Με την ίδια 'μεθοδολογία' μπορούμε να αποδείξουμε ότι και άλλα μη-επιλύσιμα προβλήματα όπως ο προσδιορισμός εάν η γλώσσα μιας TM είναι χωρίς συμφραζόμενα.
- Οποιοδήποτε πρόβλημα ελέγχου κάποιας ιδιότητας των γλωσσών που αναγνωρίζονται από TM είναι μη-επιλύσιμο! [θα το αποδείξουμε τυπικά σε επόμενη διάλεξη]
- Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι 'ευκολότερη' η αναγωγή σε κάποιο άλλο μη-επιλύσιμο πρόβλημα από το A_{TM} .

Αναγωγή μέσω του υπολογιστικού χρονικού

■ Συνήθως η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν η μη-διαγνωσιμότητα σχετίζεται με κάποιον έλεγχο ύπαρξης [10ο πρόβλημα Hilbert]

■ Έστω TM M και w συμβολοσειρά εισόδου. Ένα **υπολογιστικό χρονικό** της M επί της w είναι μια ακολουθία φάσεων $\{C_1, C_2, \dots, C_\ell\}$ τ.ω.:

- $C_1 = q_0 w$ είναι η αρχική φάση,
- C_i παράγει C_{i+1} για όλα τα $1 \leq i < \ell$, και
- C_ℓ είναι μια φάση τερματισμού [είτε σε κατάσταση αποδοχής είτε σε κατάσταση απόρριψης].

Αν C_ℓ είναι αποδεκτή, τότε το χρονικό ονομάζεται **αποδεκτό**. Αν C_ℓ είναι απορριπτέα, τότε το χρονικό ονομάζεται **απορριπτικό**.

■ Η M αποδέχεται την w ανν η M επί της w έχει ένα αποδεκτό υπολογιστικό ιστορικό.

Αναγωγή μέσω του υπολογιστικού χρονικού

- Ένα **γραμμικώς φραγμένο αυτόματο** (LBA) είναι μια φραγμένη TM M τ.ω. όταν η M εκτελείται σε οποιαδήποτε συμβολοσειρά εισόδου w , η κεφαλή της παραμένει πάντα εντός των πρώτων $|w|$ κελιών.
- Η ‘γραμμικότητα’ προέρχεται από το ότι $|\Gamma| > |\Sigma|$.
- Οι μηχανές για τα A_{DFA} , E_{DFA} , A_{CFG} , E_{CFG} , A_{CFL} είναι LBA.

Αναγωγή μέσω του υπολογιστικού χρονικού

Λήμμα. Έστω M LBA με $|K| = q$ και $|\Gamma| = g$. Το πλήθος των διαφορετικών φάσεων του M για ταινία μήκους n είναι qng^n .

Απόδειξη. Κάθε φάση του M αποτελείται από: 1) την κατάσταση, 2) την θέση της κεφαλής στην ταινία, και 3) το περιεχόμενο της ταινίας.

Υπάρχουν q καταστάσεις, η θέση της κεφαλής έχει n πιθανές θέσεις, και σε μια ταινία μήκους n μπορούν να καταχωριθούν μέχρι g^n διαφορετικές συμβολοσειρές από σύμβολα ταινίας.

Πολλαπλασιάζοντας τους τρεις όρους βρίσκουμε το αποτέλεσμα. □

Αναγωγή μέσω του υπολογιστικού χρονικού

■ Έστω το πρόβλημα

$$A_{\text{LBA}} = \{ \langle M, w \rangle \mid \text{η TM } M \text{ είναι LBA που αποδέχεται } w \}.$$

Θεώρημα. Η A_{LBA} είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. (Ιδέα) Κατασκευάζουμε TM, L , για την A_{LBA} . Προσομοιώνουμε την M για είσοδο w . Εάν κάποια στιγμή η προσομοίωση αποδεχτεί ή απορρίψει, αποδεχόμαστε ή απορρίπτουμε. Για να ανιχνεύσουμε τυχόν εγκλωβισμό εκμεταλλευόμαστε τα φραγμένα χαρακτηριστικά της M .

$L =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$:

1. Προσομοιώνουμε το M για w μέχρι να τερματίσει ή να συμπληρώσει qng^n βήματα.
2. Εάν το M αποδεχτεί, αποδεχόμαστε.
Εάν το M απορρίψει, απορρίπτουμε.
Εάν το M δεν τερματίσει, απορρίπτουμε.”

□

Αναγωγή μέσω του υπολογιστικού χρονικού

■ Έστω το πρόβλημα

$$E_{LBA} = \{\langle M \rangle \mid \text{η TM } M \text{ είναι LBA και } L(B) = \emptyset\}.$$

Θεώρημα. Η E_{LBA} είναι μη-διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Με αναγωγή από το A_{TM} στο E_{LBA} μέσω υπολογιστικού χρονικού. Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν διαγνώστη R για το E_{LBA} . Χρησιμοποιώντας τον R , κατασκευάζουμε έναν διαγνώστη S για το A_{TM} :

$S =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$:

1. Κατασκευάζουμε έναν LBA B τ.ω. $L(B) \neq \emptyset$ ανν το M αποδέχεται το w .
2. Εκτελούμε τον R στο $\langle B \rangle$.
3. Αν ο R αποδεχτεί, τότε **απορρίπτει**.

Αν ο R απορρίψει, **αποδέχεται**.”

Ο S δεν είναι εφικτός, συνεπώς ούτε και ο R . Άρα, η E_{LBA} μη-διαγνώσιμη. □

Ιεραρχία Γραμματικών Chomsky

- τύπου-0: γενικές γραμματικές $[\alpha \rightarrow \beta, \alpha \neq \varepsilon]$
- τύπου-1: γραμματικές με συμφραζόμενα ή μονοτονικές $[\alpha \rightarrow \beta, |\alpha| \leq |\beta|, S \rightarrow \varepsilon]$
- τύπου-2: γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (context free) $[A \rightarrow \beta, A \in V]$
- τύπου-3: κανονικές γραμματικές $(w \in \Sigma^*, A, B \in V)$
 $[(A \rightarrow w, A \rightarrow wB) \oplus (A \rightarrow w, A \rightarrow Bw)]$



Noam Chomsky (1928 -)

τύπου-3	$\subset$	τύπου-2	$\subset$	τύπου-1	$\subset$	τύπου-0
κανονική	$\rightsquigarrow$	CFL	$\rightsquigarrow$	CSL	$\rightsquigarrow$	T-αναγνωρίσιμη
FA	$\Rightarrow$	PDA	$\Rightarrow$	LBA	$\Rightarrow$	TM