



ΗΥ - 280 Θεωρία Υπολογισμού

Διάλεξη 13

Κωνσταντίνος Βάρσος

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών – Πανεπιστήμιο Κρήτης

Χειμερινό εξάμηνο 2025 - 26

Υπολογισιμότητα

Τι είδαμε στην Διάλεξη 12

- Μηχανές Turing πολλαπλών ταινιών.
- Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing.
- Υπολογίσιμες συναρτήσεις.

Υπολογίσιμες συναρτήσεις

π.χ., Έστω η συνάρτηση $\phi(n) = 2n$ και η κωδικοποίηση γίνεται στο μοναδιαίο σύστημα αρίθμησης (unary).

Χωρίζουμε την ταινία στο κομμάτι της εισόδου και στο κομμάτι της εξόδου, χρησιμοποιώντας ένα ειδικό σύμβολο, έστω $\#$. Αρχικά, αριστερά του $\#$ είναι η είσοδος, η κωδικοποίηση του n , και δεξιά του $\#$ κενή.

$M =$ "Για είσοδο n :

1. Χωρίζουμε την ταινία χρήσει $\#$.
2. Διέγραψε τον αριστερότερο 1 από την συμβολσειρά πριν $\#$.
3. Διέτρεξε όλη την είσοδο, το $\#$ και την έξοδο και γράψε 11.
4. Διέτρεξε την ταινία προς τα αριστερά μέχρι να βρεις τον πρώτο 1 πριν το $\#$.
5. Επανέλαβε 2.-4..
6. Αν κανένας 1 πριν $\#$, αποδέξου."



Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

■ Μια TM ονομάζεται **απαριθμητής** όταν εκτυπώνει συμβολοσειρές στην έξοδο.

Ορισμός [Άσκηση 3.4, Sipser] Μια TM **απαριθμητής** ορίζεται ως $M = (K, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$, όπου Γ_1 είναι το αλφάβητο της ταινίας εισόδου/εξόδου και Γ_2 είναι το αλφάβητο της εκτύπωσης. Για τις μεταβάσεις έχουμε,

$$\delta : K \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow K \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \{R, L\}^2.$$

Ειδική κατάσταση $p \in K$ (συγγενής της q_{acc}).

■ Έστω η TM $M = (K, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$ **απαριθμεί** μια γλώσσα L εάν στην **κατάσταση απαρίθμησης** p της M ισχύει ότι:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid (s, \sqcup) \vdash_M^* (p, w \sqcup)\}$$

■ Η κατάσταση p αναφέρεται και ως q_{output} .

■ Αρχικά, η ταινία είναι **κενή**.

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

Θεώρημα. Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη ανν απαριθμείται από TM.

Απόδειξη. [Ευθύ] Έστω ότι μια γλώσσα L αναγνωρίζεται από TM M . Μπορούμε να κατασκευάσουμε απαριθμητή E .

Έστω $\{w_i\}, i \in \mathbb{N}$, κατάλογος με όλες τις πιθανές συμβολοσειρές $\in \Sigma^*$.

Μηχανή E :

Αγνόησε την είσοδο.

Για $j \in \mathbb{N}$:

- 1. $M(w_k)$ για j βήματα, όπου $w_k \in \{w_i\}$.*
- 2. Εκτύπωσε w_k όταν ο υπολογισμός $M(w_k)$ γίνεται αποδεκτός.*

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

Απόδειξη. [Ευθύ - συνέχεια]

Συνεπώς, αν η M αποδεχθεί συγκεκριμένο w θα κατασκευάσει τον κατάλογο του E .

Το w θα βρίσκεται απείρως πολλές φορές καθώς η M για κάθε $k \leq j$ σε κάθε επανάληψη.

Εδώ η M δουλεύει παράλληλα για κάθε συμβολοσειρά εισόδου.

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

Θεώρημα. Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη ανν απαριθμείται από TM.

Απόδειξη. [Αντίστροφο] Έστω ότι μια γλώσσα L απαριθμείται από απαριθμητή E . Τότε η εξής μηχανή M αναγνωρίζει τη γλώσσα L :

Μηχανή M :

Με είσοδο τη συμβολοσειρά w : Εκτέλεσε την E μέχρι να εκτυπώσει το w , τότε αποδέξου.

Συνεπώς, οι συμβολοσειρές που ανήκουν στη L θα γίνουν δεκτές κάποια στιγμή, επειδή τελικά θα εκτυπωθούν, ενώ οι συμβολοσειρές που δεν ανήκουν στη L δεν θα γίνουν ποτέ δεκτές, επειδή το 'μέχρι να εκτυπώσει το w ' θα εκτελείται για πάντα. □

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

π.χ., Κατασκευάστε TM η οποία να απαριθμεί τη γλώσσα $L = \{0^n \mid n \geq 0\}$.

(Περιγραφή) Η TM ξεκινάει με την κενή ταινία και την κεφαλή στο αριστερότερο κελί της.

■ Αρχικά, απαριθμεί την κενή συμβολοσειρά κινώντας την κεφαλή αριστερά ώστε αυτή να παραμείνει στο αριστερότερο κελί της ταινίας, μπαίνοντας παράλληλα στην κατάσταση p .

■ Εν συνεχεία, για να σχηματίσει την συμβολοσειρά 0^{k+1} από τη 0^k για οποιοδήποτε $k \geq 0$, αρκεί να προσθέσει ένα 0 στο τέλος.

■ Άρα, από την p γράφει 0 στο κενό κελί, κινεί την κεφαλή στο αμέσως δεξιότερο κελί και παραμένει στην p .

...

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

π.χ., Κατασκευάστε TM η οποία να απαριθμεί τη γλώσσα $L = \{0^n \mid n \geq 0\}$.

Η TM $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$ θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$K = \{s, p\}, \quad \Sigma = \{0\}, \quad \Gamma = \{0, \sqcup\}$$

και συνάρτηση μετάβασης δ

q	σ	$\delta(q, \sigma)$	Σχόλιο
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, L)$	απαρίθμηση της κενής συμβολοσειράς
p	$\sqcup$	$(p, 0, R)$	σχηματίζει την 0^{k+1} από την 0^k και απαριθμεί

...

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

π.χ., Κατασκευάστε TM η οποία να απαριθμεί τη γλώσσα $L = \{0^n \mid n \geq 0\}$.

q	σ	$\delta(q, \sigma)$	Σχόλιο
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, L)$	απαρίθμηση της κενής συμβολοσειράς
p	$\sqcup$	$(p, 0, R)$	σχηματίζει την 0^{k+1} από την 0^k και απαριθμεί

■ Η λειτουργία της μηχανής έως την απαρίθμηση της 00000.

$$(s, \sqcup) \vdash_M (p, \sqcup\sqcup) \vdash_M (p, 0\sqcup) \vdash_M (p, 00\sqcup) \vdash_M (p, 000\sqcup) \vdash_M (p, 0000\sqcup) \vdash_M (p, 00000\sqcup).$$

□

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

π.χ., Κατασκευάστε TM η οποία να απαριθμεί τη γλώσσα $L = \{w \in \{a, b\}^*\}$.

(Περιγραφή) Η TM ξεκινάει με την κενή ταινία και την κεφαλή στο αριστερότερο κελί της.

■ Για να απαριθμήσει η TM κάθε συμβολοσειρά της L , θα δουλέψουμε κατά αύξοντα μήκος συμβολοσειράς. Για συμβολοσειρές ίδιου μήκους χρησιμοποιούμε λεξικογραφική διάταξη.
 $[\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots]$

■ Για να σχηματίσουμε όλες τις συμβολοσειρές ίδιου μήκους, αρκεί να ξεκινήσουμε από δεξιά, όσο βλέπουμε b (a) να το αλλάζουμε σε a (b) συνεχίζοντας προς τα αριστερά.

■ Η TM αλλάζει τα b με $\mathbf{X}$ [από δεξιά προς αριστερά], κατόπιν αλλάζει τα $\mathbf{X}$ με a [από αριστερά προς δεξιά]

Η TM $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$ θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, p\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, \mathbf{X}, \sqcup\}$$

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

και συνάρτηση μετάβασης δ

q	σ	$\delta(q, \sigma)$	Σχόλιο
q_0	$\sqcup$	$(p, \sqcup, L)$	απαρίθμηση της κενής συμβολοσειράς
p	$\sqcup$	$(q_1, \sqcup, L)$	πηγαίνει αριστερά
q_1	$\sqcup$	(p, a, R)	μόλις απαριθμήθηκε η ε , απαρίθμηση τη a
q_1	a	(p, b, R)	αλλάζει a στο τέλος σε b και απαριθμεί
q_1	b	$(q_2, \mathbf{X}, L)$	αλλάζει b στο τέλος σε $\mathbf{X}$ και πάει αριστερά
q_2	a	(q_3, b, R)	βρήκε a , το αλλάζει σε b και κάνει μεταβολή
q_2	b	$(q_2, \mathbf{X}, L)$	αλλάζει b σε $\mathbf{X}$ και πάει αριστερά
q_2	$\mathbf{X}$	(q_5, a, R)	μόλις απαρίθμησησε την b^k , φτιάχνει την a^{k+1}
q_3	$\mathbf{X}$	(q_3, a, R)	αλλάζει $\mathbf{X}$ σε a και πάει δεξιά
q_3	$\sqcup$	$(q_4, \sqcup, R)$	πηγαίνει δεξιά και μετά πίσω ώστε να βάλει ...
q_4	$\sqcup$	$(p, \sqcup, L)$	... την κεφαλή στη σωστή θέση, απαριθμεί
q_5	$\mathbf{X}$	(q_5, a, R)	αλλάζει $\mathbf{X}$ σε a και πάει δεξιά
q_5	$\sqcup$	(p, a, R)	γράφει ένα ακόμα a και απαριθμεί.

Μηχανές Turing - Απαρίθμηση Γλώσσας

π.χ., Για την TM η οποία να απαριθμεί τη γλώσσα $L = \{w \in \{a, b\}^*\}$, η λειτουργία της μηχανής έως την απαρίθμηση της συμβολοσειράς aab είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
 (s, \underline{\quad}) &\vdash_M (p, \underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, \underline{\quad}) \vdash_M (p, a\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, a\underline{\quad}) \vdash_M (p, b\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, b\underline{\quad}) \vdash_M (q_2, \mathbf{X}\underline{\quad}) \vdash_M (q_2, a\underline{\quad}) \vdash_M (p, aa\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, aa\underline{\quad}) \vdash_M (p, ab\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, ab\underline{\quad}) \vdash_M (q_2, a\mathbf{X}\underline{\quad}) \vdash_M (q_2, b\mathbf{X}\underline{\quad}) \vdash_M (q_3, ba\underline{\quad}) \vdash_M (q_4, ba \sqcup \underline{\quad}) \vdash_M (p, ba\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, ba\underline{\quad}) \vdash_M (p, bb\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, bb\underline{\quad}) \vdash_M (q_2, b\mathbf{X}\underline{\quad}) \vdash_M (q_2, \mathbf{X}\mathbf{X}\underline{\quad}) \vdash_M (q_5, a\mathbf{X}\underline{\quad}) \vdash_M (q_5, aa\underline{\quad}) \vdash_M (p, aaa\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M (q_1, aaa\underline{\quad}) \vdash_M (p, aab\underline{\quad}) \\
 &\vdash_M \dots
 \end{aligned}$$



Μηχανές Turing – Ανασκόπηση

■ Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν υπάρχει Μηχανή Turing πολλαπλών ταινιών που να την αναγνωρίζει.

■ Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη (**αναδρομικά απαριθμήσιμη**) αν υπάρχει μη-ντετερμινιστική Μηχανή Turing που να την αναγνωρίζει.

$$\text{Αν } M \text{ αναγνωρίζει την } L \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w \in L, \text{ η } M \text{ φτάνει σε } q_{acc} \\ w \notin L, \text{ η } M \text{ είτε φτάνει σε } q_{rej} \text{ είτε ατέρμον βρόγχος} \end{array} \right\}$$

■ Μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη (**αναδρομική**) αν υπάρχει μη-ντετερμινιστική Μηχανή Turing που να την διαγιγνώσκει.

$$\text{Αν } M \text{ διαγιγνώσκει την } L \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w \in L, \text{ η } M \text{ φτάνει σε } q_{acc} \\ w \notin L, \text{ η } M \text{ φτάνει σε } q_{rej} \end{array} \right\}$$

Μηχανές Turing – Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Θεώρημα. Αν μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη, τότε είναι και αναγνωρίσιμη.

Απόδειξη (σκαρίφημα) Αρκεί να βρούμε απαριθμητική διαδικασία για την γλώσσα. Δεδομένου του αλφαβήτου Σ και μιας TM $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{rej}, q_{acc})$ που αποφασίζει μια αναδρομική γλώσσα L , ορίζουμε την TM απαριθμητή $M' = (K, \Sigma, \Gamma, \delta', s', q'_{acc}, q'_{acc})$ πάνω στο Σ^* . Η TM M' κατασκευάζει όλες τις πιθανές συμβολοσειρές από το Σ^* , τις περνάει στην M και αυτή αποφασίζει για κάθε μια από αυτές. $\square$

Θεώρημα. Αν μια γλώσσα L είναι αναδρομική, τότε είναι και $\bar{L}$.

Απόδειξη. Έστω TM $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$ που αποφασίζει μια γλώσσα L . Τότε η γλώσσα $\bar{L}$ αποφασίζεται από την $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta', s, q_{rej}, q_{acc})$, όπου η δ' 'αντιστρέφει' την δ ως προς τα q_{rej}, q_{acc} . $\square$

Μηχανές Turing - Γλώσσες

Θεώρημα. Αν μια γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, τότε και η $\bar{L}$ είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Έστω ότι μια TM M διαγιγνώσκει την L . Κατασκευάζουμε καινούργια TM N η οποία να διαφέρει από την M στα εξής:

- Αν η M αποδέχεται, τότε η N απορρίπτει.
- Αν η M απορρίπτει, τότε η N αποδέχεται.

Δηλαδή, $q_{rej}^N = q_{acc}^M$ και $q_{acc}^N = q_{rej}^M$.

Η N διαγιγνώσκει την L .

□

Μηχανές Turing - Γλώσσες

Θεώρημα. Έστω γλώσσα L . Η L είναι διαγνώσιμη ανν τόσο η L όσο και η $\bar{L}$ είναι αναγνωρίσιμες.

Απόδειξη. [Ευθύ]

Η L είναι διαγνώσιμη $\Rightarrow$ η L είναι αναγνωρίσιμη

Η L είναι διαγνώσιμη $\Rightarrow$ η $\bar{L}$ είναι διαγνώσιμη



η $\bar{L}$ είναι αναγνωρίσιμη

...

Μηχανές Turing - Γλώσσες

Θεώρημα. Έστω γλώσσα L . Η L είναι διαγνώσιμη ανν τόσο η L όσο και η $\bar{L}$ είναι αναγνωρίσιμη.

Απόδειξη. [Αντίστροφο] Έστω ΤΜ M_1 η οποία αναγνωρίζει την L , και ΤΜ M_2 η οποία αναγνωρίζει την $\bar{L}$. Θα κατασκευάσουμε μια ΤΜ N η οποία θα διαγιγνώσκει για οποιαδήποτε συμβολοσειρά εισόδου w αν $w \in L$ ή στην $w \in \bar{L}$.

[Ιδέα] Αν τρέξουν τόσο η M_1 όσο και η M_2 για είσοδο w , τότε κάποια από τις δύο θα πρέπει να αποδεχθεί την w . [Αν αποδεχθεί η M_1 , τότε η M_2 θα απορρίψει και το ανάποδο]

Ωστόσο, οι μηχανές δεν μπορούν να τρέξουν εξακολουθητικά γιατί μπορεί η πρώτη στη σειρά να μην τερματίσει.

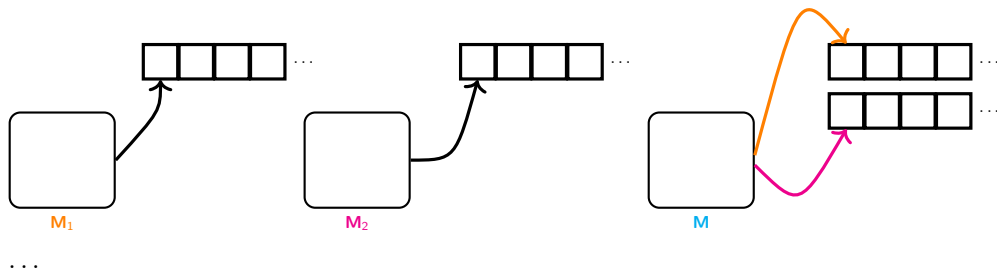
Αν τρέξουν παράλληλα;

...

Μηχανές Turing - Γλώσσες

Θεώρημα. Έστω γλώσσα L . Η L είναι διαγνώσιμη ανν τόσο η L όσο και η $\bar{L}$ είναι αναγνωρίσιμη.

Απόδειξη. (συνέχεια)



Μηχανές Turing - Γλώσσες

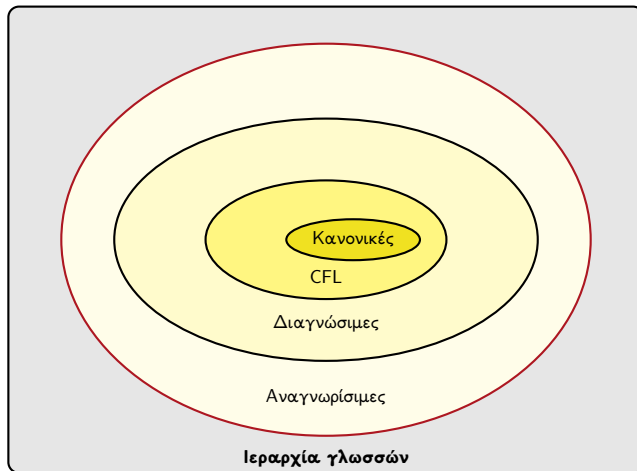
Θεώρημα. Έστω γλώσσα L . Η L είναι διαγνώσιμη ανν τόσο η L όσο και η $\bar{L}$ είναι αναγνωρίσιμη.

Απόδειξη. (συνέχεια) Η M δουλεύει ως εξής:

1. Αντιγράφει την είσοδος της ταινίας της M_1 στην ταινία της M_2 .
 2. Αναπαράγει τις M_1 και M_2 ταυτόχρονα, βήμα-βήμα.
- Δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των M_1 και M_2 .
 - Ο πεπερασμένος έλεγχος της M ιχνηλατεί τις καταστάσεις των M_1 και M_2 . Επομένως, $K_1 \times K_2 \subseteq K$.
 - Επίσης, η M περιέχει καινούργιες καταστάσεις: αρχική, αποδοχής, απόρριψης. □

Μηχανές Turing - Γλώσσες

■ Μια ιεραρχία για τις γλώσσες



Κατηγοριοποίηση Γλωσσών

■ Οι αναγνωρίσιμες γλώσσες είναι κλειστές ως προς την ένωση, παράθεση, Kleene star και την τομή.

■ Συγκεντρωτικά,

	$\bar{L}$	
L	(αναγνωρίσιμη, αναγνωρίσιμη)	(αναγνωρίσιμη, $\neg$ αναγνωρίσιμη)
	($\neg$ αναγνωρίσιμη, αναγνωρίσιμη)	($\neg$ αναγνωρίσιμη, $\neg$ αναγνωρίσιμη)

■ Υπάρχουν γλώσσες όπου τόσο αυτές όσο και τα συμπληρώματά τους δεν είναι αναγνωρίσιμες;

Κατηγοριοποίηση Γλωσσών

■ Οι αναγνωρίσιμες γλώσσες είναι κλειστές ως προς την ένωση, παράθεση, Kleene star και την τομή.

■ Συγκεντρωτικά,

	$\bar{L}$	
L	(αναγνωρίσιμη, αναγνωρίσιμη)	(αναγνωρίσιμη, $\neg$ αναγνωρίσιμη)
	($\neg$ αναγνωρίσιμη, αναγνωρίσιμη)	($\neg$ αναγνωρίσιμη, $\neg$ αναγνωρίσιμη)

■ Υπάρχουν γλώσσες όπου τόσο αυτές όσο και τα συμπληρώματά τους δεν είναι αναγνωρίσιμες;

■ Αριθμήσιμο πλήθος αναγνωρίσιμων γλωσσών [τόσο για L όσο και για $\bar{L}$]

■ Μη-αριθμήσιμο πλήθος γλωσσών!

Θέση Church-Turing



★ Αλγόριθμοι



★ Μηχανές Turing



Θέση Church-Turing

- Ο υπολογισμός καθορίζεται με τυπικό τρόπο από τις μηχανές Turing.
- Ο αλγόριθμος καθορίζεται πάντοτε από τις μηχανές Turing που τερματίζουν πάντα
 - μηχανές που αποφασίζουν γλώσσες
 - μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις

★ Κάθε αλγόριθμος μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια μηχανή Turing που τερματίζει για κάθε είσοδο. Κάθε μηχανή Turing που τερματίζει για κάθε είσοδο κωδικοποιεί ένα αλγόριθμο.

Επιλύσιμα Προβλήματα

Σύμφωνα με την θέση Church-Turing,

Διαγνώσιμη γλώσσα
↕
Επιλύσιμο πρόβλημα
↕
Αλγόριθμος για το πρόβλημα

10ο Πρόβλημα Hilbert

Διατύπωση. Δώστε έναν ‘αλγόριθμο’ που να λύνει τις Διοφαντικές εξισώσεις.

■ Διοφαντικές εξισώσεις, εξισώσεις πολυωνύμων με αποκλειστικά και μόνο ακέραιες λύσεις.

π.χ. $3x^2 - 2xy - y^2z = 7, x = 1, y = 2, z = -2.$

□ Έστω η γλώσσα

$$A = \{p \mid \text{πολυώνυμο } p(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ έχει λύσεις στους ακεραίους}\}.$$

■ **10ο Πρόβλημα.** Δώστε αλγόριθμο ο οποίος να αποφασίζει για την A .

■ Η γλώσσα A είναι μη-διαγνώσιμη, [Matiyasevich, '70].

■ Η γλώσσα A είναι αναγνώρισιμη.



Κατηγοριοποίηση Προβλημάτων

■ Προβλήματα **Απόφασης**. Απάντηση: **ΝΑΙ / ΟΧΙ**.

π.χ. Δεδομένου γράφου, υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο συγκεκριμένων κόμβων;

■ Προβλήματα **Αναζήτησης**. Απάντηση: κάποια δομή που πληροί κάποιες απαιτήσεις.

π.χ. Δεδομένου γράφου, βρες ένα μονοπάτι μεταξύ δύο συγκεκριμένων κόμβων.

■ Προβλήματα **Βελτιστοποίησης**. Απάντηση: κάποια δομή που πληροί κάποιες απαιτήσεις **και** βελτιστοποιεί κάποιο κριτήριο.

π.χ. Δεδομένου γράφου, βρες το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ δύο συγκεκριμένων κόμβων.

■ Τα προβλήματα απόφασης δεν είναι *ευκολότερα* από τα άλλα είδη προβλημάτων.

π.χ., Πρόβλημα απόφασης: $L = \{w \mid w \in A, \text{ πρόβλημα } P \text{ με απάντηση ΝΑΙ}\}.$

Ορολογία & Τυποποίηση Μηχανών Turing

■ Οι TM δέχονται ως είσοδο συμβολοσειρές.

■ Αν O κάποιο αντικείμενο (πολυώνυμο, γράφος, αυτόματο, κτλ), γράφουμε $\langle O \rangle$ την κωδικοποίηση του σε μια συμβολοσειρά.

■ Αν $O_1, O_2, \dots, O_k$ λίστα κάποιων αντικειμένων, γράφουμε $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$ την κωδικοποίηση τους σε μια συμβολοσειρά.

π.χ., Πρόβλημα απόφασης: $L = \{w \mid w \in A, \text{ πρόβλημα } P \text{ με απάντηση ΝΑΙ}\}.$

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Πρόβλημα αποδοχής για DFA.

■ Έστω η γλώσσα

$$A_{\text{DFA}} = \{ \langle B, w \rangle \mid B \text{ είναι DFA και αποδέχεται την συμβολοσειρά } w \}.$$

Ιδέα. Αυτόματο B αποδέχεται την w , ανν η συμβολοσειρά $\langle B, w \rangle \in A_{\text{DFA}}$.

■ Αν δείξουμε ότι η A_{DFA} είναι διαγνώσιμη, αποδεικνύουμε και ότι το υπολογιστικό πρόβλημα είναι επιλύσιμο!

...

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Η γλώσσα $A_{\text{DFA}} = \{\langle B, w \rangle \mid B \text{ είναι DFA και αποδέχεται την συμβολοσειρά } w\}$ είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η A_{DFA} είναι αποφασίσιμη, κατασκευάζουμε έναν αλγόριθμο που αποφασίζει αν ένα ζεύγος $\langle B, w \rangle$ ανήκει στη A_{DFA} :

- 1 Δεχόμαστε ως είσοδο την περιγραφή $\langle B, w \rangle$, όπου B είναι DFA και w είναι μια συμβολοσειρά.
- 2 Εκτελούμε την B στην είσοδο w .
- 3 Αν B καταλήξει σε μια αποδεκτή κατάσταση μετά την επεξεργασία της w , αποδεχόμαστε την είσοδο.
- 4 Αν B δεν καταλήξει σε αποδεκτή κατάσταση, απορρίπτουμε την είσοδο.

Ο αλγόριθμος αυτός τερματίζει πάντα, καθώς το DFA έχει πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων και η λέξη w έχει πεπερασμένο μήκος. Συνεπώς, η γλώσσα A_{DFA} είναι διαγνώσιμη. □

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Η ΤΜ που διαγιγνώσκει την A_{DFA} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle B, w \rangle$, όπου B ένα DFA και w μια συμβολοσειρά :

1. Προσομοιώνουμε τη B για είσοδο w ,
2. Εάν το 1. καταλήξει σε αποδοχή, **αποδεχόμαστε**.
3. Εάν το 1. καταλήξει σε απόρριψη, **απορρίπτουμε**.”

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Η ΤΜ που διαγιγνώσκει την A_{DFA} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle B, w \rangle$, όπου B ένα DFA και w μια συμβολοσειρά :

1. Προσομοιώνουμε τη B για είσοδο w ,
2. Εάν το 1. καταλήξει σε αποδοχή, **αποδεχόμαστε**.
3. Εάν το 1. καταλήξει σε απόρριψη, **απορρίπτουμε**.”

■ Είναι η γλώσσα $A_{NFA} = \{\langle B, w \rangle \mid B \text{ είναι NFA και αποδέχεται την συμβολοσειρά } w\}$ διαγνώσιμη;

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Πρόβλημα παραγωγής κανονικής έκφρασης (Regex).

■ Έστω η γλώσσα

$$A_{\text{Regex}} = \{ \langle R, w \rangle \mid R \text{ είναι κανονική έκφραση που παράγει την συμβολοσειρά } w \}.$$

Ιδέα. Η κανονική έκφραση R παράγει την w , ανν η συμβολοσειρά $\langle R, w \rangle \in A_{\text{Regex}}$.

■ Αν δείξουμε ότι η A_{Regex} είναι διαγνώσιμη, αποδεικνύουμε και ότι το υπολογιστικό πρόβλημα είναι επιλύσιμο!

...

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Η γλώσσα $A_{\text{Regex}} = \{\langle R, w \rangle \mid R \text{ κανονική έκφραση που παράγει την συμβολοσειρά } w\}$ είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η γλώσσα A_{Regex} είναι αποφασίσιμη, κατασκευάζουμε έναν αλγόριθμο που αποφασίζει αν ένα ζεύγος $\langle R, w \rangle \in A_{\text{Regex}}$:

- 1 Δεχόμαστε ως είσοδο την περιγραφή $\langle R, w \rangle$, όπου R είναι μια κανονική έκφραση και w μια συμβολοσειρά.
- 2 Μετατρέπουμε την κανονική έκφραση R σε ισοδύναμο DFA, χρησιμοποιώντας τους γνωστούς αλγορίθμους μετατροπής κανονικών εκφράσεων σε αυτόματα.
- 3 Εκτελούμε το DFA στην είσοδο w .
 - 1 Αν το DFA καταλήξει σε αποδεκτή κατάσταση μετά την επεξεργασία της w , αποδεχόμαστε την είσοδο.
 - 2 Αν το DFA δεν καταλήξει σε αποδεκτή κατάσταση, απορρίπτουμε την είσοδο.

Ο αλγόριθμος αυτός τερματίζει πάντα, καθώς η μετατροπή της κανονικής έκφρασης σε DFA είναι πεπερασμένη και το DFA εκτελείται σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Συνεπώς, η γλώσσα A_{Regex} είναι αποφασίσιμη. $\square$

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Η TM που διαγιγνώσκει την A_{REX} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle R, w \rangle$, όπου R κανονική έκφραση και w μια συμβολοσειρά :

1. Μετατρέπουμε R σε ένα ισοδύναμο FA για είσοδο w ,
2. Χρησιμοποιούμε την TM από το A_{DFA} (A_{NFA}), για είσοδο $\langle R, w \rangle$.
3. Εάν η TM του 2. αποδέχεται, τότε **αποδεχόμαστε**.
4. Εάν η TM του 2. απορρίπτει, τότε **απορρίπτουμε**.”

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Πρόβλημα κενότητας.

■ Έστω η γλώσσα

$$E_{\text{DFA}} = \{\langle B \rangle \mid B \text{ είναι ένα DFA και } L(B) = \emptyset\}.$$

Ιδέα. Ένα DFA αποδέχεται κάποια από τις εισόδους του όταν ξεκινώντας από την s φτάσεις σε κάποια από τις F .

...

Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Η γλώσσα $E_{\text{DFA}} = \{\langle B \rangle \mid B \text{ είναι ένα DFA και } L(B) = \emptyset\}$ είναι διαγνώσιμη.

Ιδέα. Ένα DFA αποδέχεται κάποια από τις εισόδους του όταν ξεκινώντας από την s φτάσεις σε κάποια από τις F .

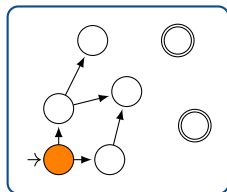
■ Η TM που διαγιγνώσκει την E_{DFA} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle B \rangle$, όπου B είναι ένα DFA και w μια συμβολοσειρά :

1. Σημειώνουμε την αρχική κατάσταση του B .
2. Επαναλαμβάνουμε έως ότου καμία νέα κατάσταση να μην σημειωθεί.
Σημειώνουμε κάθε κατάσταση που έχει εισερχόμενη κορυφή από σημειωμένη κορυφή.
3. **Αποδεχόμαστε**, εάν δεν έχει σημειωθεί καμία τερματική κατάσταση.
Αλλιώς, **απορρίπτουμε**.”

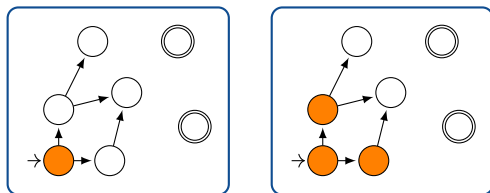
Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

Απόδειξη. (Διαισθητικά)



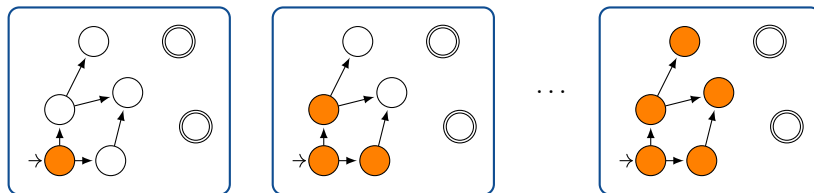
Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

Απόδειξη. (Διαισθητικά)



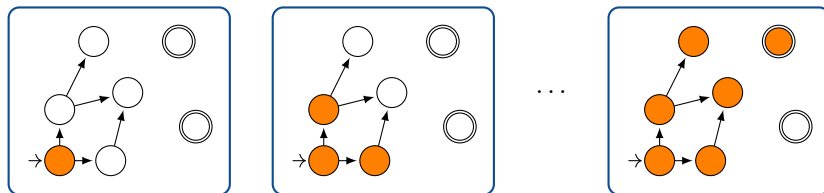
Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

Απόδειξη. (Διαισθητικά)



Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

Απόδειξη. (Διαισθητικά)



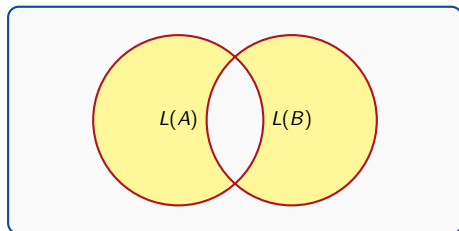
Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

■ Πρόβλημα ισοδυναμίας DFA.

■ Έστω η γλώσσα

$$EQ_{DFA} = \{\langle A, B \rangle \mid A, B \text{ είναι ένα DFA και } L(A) = L(B)\}.$$

Ιδέα. DFA που να αποδέχεται τις μη-κοινές συμβολοσειρές των A , B ,
 $(L(A) \cap \bar{L}(B)) \cup (L(B) \cap \bar{L}(A))$.



Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

Θεώρημα. Η γλώσσα EQ_{DFA} είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Η TM που διαγιγνώσκει την EQ_{DFA} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle A, B \rangle$, όπου A, B DFAs :

1. Κατασκευάζουμε ένα νέο DFA C τ.ω.

$$L(C) = (L(A) \cap \bar{L}(B)) \cup (L(B) \cap \bar{L}(A)).$$

2. Χρησιμοποιούμε την TM του E_{DFA} για το $\langle C \rangle$.
3. Αποδεχόμαστε, εάν E_{DFA} αποδέχεται.

Αλλιώς, απορρίπτουμε.”



Διαγνωσιμότητα – Κανονικές Γλώσσες

Θεώρημα. Η γλώσσα EQ_{DFA} είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Η TM που διαγιγνώσκει την EQ_{DFA} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle A, B \rangle$, όπου A, B DFAs :

1. Κατασκευάζουμε ένα νέο DFA C τ.ω.

$$L(C) = (L(A) \cap \bar{L}(B)) \cup (L(B) \cap \bar{L}(A)).$$

2. Χρησιμοποιούμε την TM του E_{DFA} για το $\langle C \rangle$.

3. **Αποδεχόμαστε**, εάν E_{DFA} αποδέχεται.

Αλλιώς, **απορρίπτουμε**.”

□

■ Είναι η γλώσσα $EQ_{REX} = \{\langle R_1, R_2 \rangle \mid R_1, R_2 \text{ είναι REX και } L(R_1) = L(R_2)\}$ διαγνώσιμη;

Διαγνωσιμότητα – Γλώσσες χωρίς Συμφραζόμενα

■ Έστω η γλώσσα,

$$A_{CFG} = \{ \langle G, w \rangle \mid G \text{ είναι CFG και παράγει το } w \}.$$

Θεώρημα. Η γλώσσα A_{CFG} είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Η ΤΜ που διαγιγνώσκει την A_{CFG} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle G, w \rangle$, G είναι CFG και w συμβολοσειρά :

1. Κατασκευάζουμε την CNF.
2. Συντάσσουμε όλες τις παραγωγές $2n - 1$ βημάτων, όπου n το μήκος της w .
[Αν $n = 0$ συντάσσουμε σε ένα βήμα].
3. Εάν κάποια από τις παραγωγές παράγει το w , **αποδεχόμαστε**.
Αλλιώς, **απορρίπτουμε**. □

Διαγνωσιμότητα – Γλώσσες χωρίς Συμφραζόμενα

■ Έστω η γλώσσα,

$$A_{CFG} = \{ \langle G, w \rangle \mid G \text{ είναι CFG και παράγει το } w \}.$$

Θεώρημα. Η γλώσσα A_{CFG} είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. Η TM που διαγιγνώσκει την A_{CFG} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle G, w \rangle$, G είναι CFG και w συμβολοσειρά :

1. Κατασκευάζουμε την CNF.
2. Συντάσσουμε όλες τις παραγωγές $2n - 1$ βημάτων, όπου n το μήκος της w .
[Αν $n = 0$ συντάσσουμε σε ένα βήμα].
3. Εάν κάποια από τις παραγωγές παράγει το w , **αποδεχόμαστε**.
Αλλιώς, **απορρίπτουμε**. □

Quiz Είναι η γλώσσα A_{PDA} διαγνώσιμη;

Διαγνωσιμότητα – Γλώσσες χωρίς Συμφραζόμενα

■ Έστω η γλώσσα,

$$E_{CFG} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ είναι CFG και } L(G) = \emptyset\}.$$

Θεώρημα. Η γλώσσα E_{CFG} είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη. (Ιδέα) Ξεκινάμε από τα τερματικά σύμβολα και οπισθοδρομούμε. Η ΤΜ που διαγιγνώσκει την E_{CFG} μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω:

$M =$ “Για είσοδο $\langle G \rangle$, G είναι CFG :

1. Σημειώνουμε όλες τις εμφανίσεις κάποιας μεταβλητής της G .
2. Επαναλαμβάνουμε έως ότου να μην σημειωθούν άλλες μεταβλητές
Σημειώνουμε μια μεταβλητή A αν $A \rightarrow B_1 \dots B_k$ είναι κανόνας παραγωγής και όλες οι B_i έχουν ήδη σημειωθεί.
3. Εάν σημειωθεί η αρχική μεταβλητή, **απορρίπτουμε**.
Αλλιώς, **αποδεχόμαστε**. □

π.χ., Για $G = \{S \rightarrow RTa, R \rightarrow Tb, T \rightarrow a\}$, απορρίπτει.

Διαγνωσιμότητα – Γλώσσες χωρίς Συμφραζόμενα

■ Έστω η γλώσσα,

$$EQ_{CFG} = \{ \langle G, H \rangle \mid G, H \text{ είναι CFGs και } L(G) = L(H) \}.$$

■ Είναι η γλώσσα EQ_{CFG} διαγνώσιμη;

Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια TM η οποία να διαγιγνώσκει την EQ_{CFG} , εφαρμόζοντας το πρόβλημα E_{CFG} .

Ωστόσο, οι γλώσσες $\bar{L}(R_1)$, $\bar{L}(R_2)$, $L(R_1) \cap \bar{L}(R_2)$ και $L(R_2) \cap \bar{L}(R_1)$, δεν ξέρουμε αν είναι CFG.

Άρα για να πετύχουμε τον στόχο μας θα χρειαστούμε άλλο κόλπο, αν υπάρχει.