



# ΗΥ - 280 Θεωρία Υπολογισμού

## Διάλεξη 12

Κωνσταντίνος Βάρσος

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών – Πανεπιστήμιο Κρήτης

Χειμερινό εξάμηνο 2025 - 26

# Υπολογισιμότητα

## Τι είδαμε στην Διάλεξη 11

- Μηχανές Turing.
- Υπολογισμοί σε Μηχανές Turing.
- Αναγνωρίσιμες γλώσσες.
- Διαγνώσιμες γλώσσες.

## Μηχανές Turing

π.χ., Κατασκευάστε TM η οποία αναγνωρίζει την γλώσσα, στο  $\Sigma = \{a, b\}$ , των συμβολοσειρών που περιέχουν την υποσυμβολοσειρά  $bba$ .

## Μηχανές Turing

π.χ., Κατασκευάστε TM η οποία αναγνωρίζει την γλώσσα, στο  $\Sigma = \{a, b\}$ , των συμβολοσειρών που περιέχουν την υποσυμβολοσειρά  $bba$ .

Θέλουμε,  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$ , η οποία διαβάζει την συμβολοσειρά από αριστερά προς τα δεξιά και μπαίνει στην  $q_{acc}$  μόνο όταν βρει  $bba$ .

Έχουμε,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $s = q_0$ .

Δηλαδή, εάν συναντήσει  $b$ , μπαίνει στην κατάσταση  $q_1$ , εάν συναντήσει και πάλι  $b$  μπαίνει στην κατάσταση  $q_2$ , έπειτα εάν συναντήσει  $a$  μπαίνει στην  $q_{acc}$ .

...

## Μηχανές Turing

Περιγραφή λειτουργίας  $M$ :

$M =$  "Για είσοδο  $w$  :

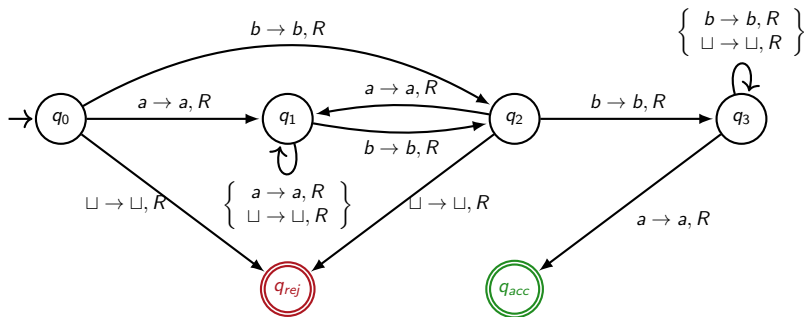
1. Διατρέχουμε την είσοδο από αριστερά προς τα δεξιά και ελέγχουμε αν  $w \in \{a, b\}^+$ .  
Αν όχι **απορρίπτουμε**.
2. Προσπερνάμε τα  $a$ , προχωράμε δεξιά.
3. Όταν βρούμε  $b$  πάμε σε νέα κατάσταση, προχωράμε δεξιά.
4. Αν βρούμε 2ο  $b$  πάμε σε νέα κατάσταση, προχωράμε δεξιά.  
Αν δεν υπάρχει άλλο σύμβολο στην  $w$ , **απορρίπτουμε**.
5. Αν βρούμε  $a$ , **αποδεχόμαστε**."

## Μηχανές Turing

Η συνάρτηση μετάβασης  $\delta$  είναι:

| $q$   | $\sigma$ | $\delta(q, \sigma)$    | Σχόλιο                                        |
|-------|----------|------------------------|-----------------------------------------------|
| $q_0$ | $a$      | $(q_1, a, R)$          | προσπερνά $a$ και συνεχίζει δεξιά             |
| $q_0$ | $b$      | $(q_2, b, R)$          | βρήκε $b$ και συνεχίζει δεξιά                 |
| $q_0$ | $\sqcup$ | $(q_{rej}, \sqcup, R)$ | βρήκε κενή συμβολοσειρά, <b>απορρίπτει</b>    |
| $q_1$ | $a$      | $(q_1, a, R)$          | προσπερνά $a$ και συνεχίζει δεξιά             |
| $q_1$ | $b$      | $(q_2, b, R)$          | βρήκε $b$ και συνεχίζει δεξιά                 |
| $q_1$ | $\sqcup$ | $(q_1, \sqcup, R)$     | δεν βρήκε $bba$ , <b>δουλεύει επ' άπειρον</b> |
| $q_2$ | $a$      | $(q_1, a, R)$          | εάν βρει $a$ , επιστρέφει στην $q_0$          |
| $q_2$ | $b$      | $(q_3, b, R)$          | βρήκε $bb$ και συνεχίζει δεξιά                |
| $q_2$ | $\sqcup$ | $(q_{rej}, \sqcup, R)$ | δεν βρήκε $bba$ , <b>απορρίπτει</b>           |
| $q_3$ | $a$      | $(q_{acc}, a, R)$      | βρήκε $bba$ , <b>αποδέχεται</b>               |
| $q_3$ | $b$      | $(q_3, b, R)$          | βρήκε $b$ , παραμένει στην $q_2$              |
| $q_3$ | $\sqcup$ | $(q_3, \sqcup, R)$     | δεν βρήκε $bba$ , <b>δουλεύει επ' άπειρον</b> |

## Μηχανές Turing



...

## Μηχανές Turing

Τυπικά, η TM  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$  θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_{acc}, q_{rej}\},$$

$$\Sigma = \{a, b\},$$

$$\Gamma = \{a, b, \sqcup\},$$

$$s = q_0,$$

$\delta$ , βλέπε σχήμα ή τον πίνακα μεταβάσεων.



## Μηχανές Turing

π.χ., Κατασκευάστε TM η οποία μπαίνει σε ατέρμονα βρόγχο για όλες τις συμβολοσειρές που τελειώνουν σε  $b$  και αποδέχεται όλες τις υπόλοιπες συμβολοσειρές.

## Μηχανές Turing

**π.χ.**, Κατασκευάστε TM η οποία μπαίνει σε ατέρμονα βρόγχο για όλες τις συμβολοσειρές που τελειώνουν σε  $b$  και αποδέχεται όλες τις υπόλοιπες συμβολοσειρές.

Θέλουμε,  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$ , η οποία διαβάζει την συμβολοσειρά από αριστερά προς τα δεξιά.

Έχουμε,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $s = q_0$ .

**[Ιδέα]** Η  $M$  να μετακινηθεί στο τέλος της συμβολοσειράς εισόδου (κατάσταση  $q_1$ ), να κινήσει την κεφαλή αριστερά ώστε να διαβάσει το τελευταίο σύμβολο. Εάν βρει  $b$ , θα πρέπει να μπαίνει σε ατέρμονα βρόγχο.

Ατέρμων βρόγχος: Είμαστε την κατάσταση  $q_1$  και η κεφαλή κινείται μια θέση δεξιά, μετά μια θέση αριστερά, ... Εάν η ταινία βρει την κενή συμβολοσειρά ή τη συμβολοσειρά που να τελειώνει σε  $a$ , αποδέχεται.

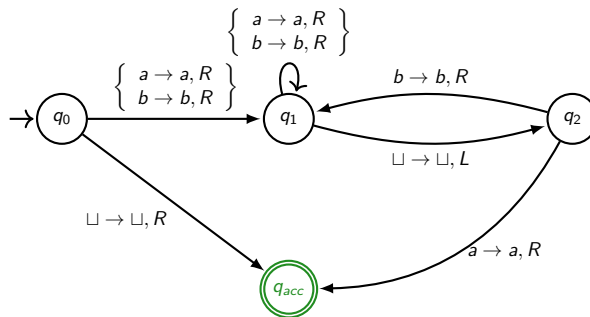
...

## Μηχανές Turing

Η συνάρτηση μετάβασης  $\delta$  είναι:

| $q$   | $\sigma$ | $\delta(q, \sigma)$    | Σχόλιο                                       |
|-------|----------|------------------------|----------------------------------------------|
| $q_0$ | $a$      | $(q_1, a, R)$          | προσπερνά $a$ και συνεχίζει δεξιά            |
| $q_0$ | $b$      | $(q_2, b, R)$          | προσπερνά $b$ και συνεχίζει δεξιά            |
| $q_0$ | $\sqcup$ | $(q_{acc}, \sqcup, R)$ | βρήκε κενή συμβολοσειράς, <b>αποδέχεται</b>  |
| $q_1$ | $a$      | $(q_1, a, R)$          | προσπερνά $a$ και συνεχίζει δεξιά            |
| $q_1$ | $b$      | $(q_2, b, R)$          | προσπερνά $b$ και συνεχίζει δεξιά            |
| $q_1$ | $\sqcup$ | $(q_2, \sqcup, L)$     | μέχρι να φτάσει στο 1ο κενό κελί             |
| $q_2$ | $a$      | $(q_{acc}, a, R)$      | βρήκε $a$ , <b>αποδέχεται</b>                |
| $q_2$ | $b$      | $(q_1, b, R)$          | το τελευταίο είναι $b$ , ξεκινάει μπρος-πίσω |

## Μηχανές Turing



...

## Μηχανές Turing

Τυπικά, η TM  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$  θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_{acc}, q_{rej}\},$$

$$\Sigma = \{a, b\},$$

$$\Gamma = \{a, b, \sqcup\},$$

$$s = q_0,$$

$\delta$ , βλέπε σχήμα ή τον πίνακα μεταβάσεων.



## Επεκτάσεις Μηχανής Turing

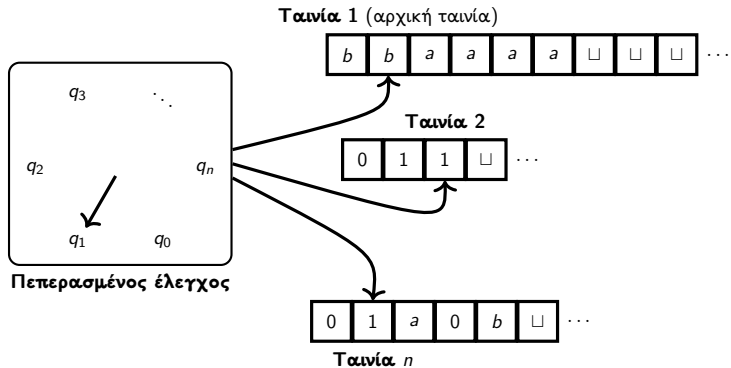
- Οι TM είναι ένα μοντέλο υπολογισμών γενικής χρήσης, δηλαδή όλα τα μοντέλα είναι ισοδύναμα.
- Οι TM είναι ένα πολύ ισχυρό υπολογιστικό μοντέλο.
- Προσπάθεια ενίσχυσης με επιπλέον δυνατότητες, για παράδειγμα
  - Πολλαλπές ταινίες.
  - Ταινία άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις.
  - Πολλαπλές κεφαλές.
  - Ταινία  $n > 1$  διαστάσεων.

**Θετικά.** Ευκολότερος σχεδιασμός.

**Αρνητικά.** Δεν ενισχύεται το υπολογιστικό μοντέλο. Δηλαδή, ίδιες κλάσεις αναγνωρίσιμων και διαγνώσιμων γλωσσών.

■ Η βασική TM προσομοιώνει τις 'ενισχυμένες' εκδόσεις.

## Μηχανές Turing πολλαλών ταινιών



## Μηχανές Turing πολλαλών ταινιών

■ Μηχανή Turing με  $k \geq 1$  ταινίες  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{rej}, q_{acc})$ :

$$\delta : K \times \Gamma^k \rightarrow K \times \Gamma^k \times \{R, L\}^k$$

π.χ.,  $\delta(q, a_1, \dots, a_k) = (p, b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k), \quad D_i \in \{R, L\}.$

■ Συνολική κατάσταση,  $(q, (w_1 \underline{a_1} u_1, \dots, w_k \underline{a_k} u_k))$ .

■ Ομοίως με πριν για τις σχέσεις  $\vdash_M$  και  $\vdash_M^*$ .

■ Η συμβολοσειρά εισόδου τοποθετείται στην πρώτη ταινία με τον ίδιο τρόπο όπως και σε μια απλή TM.

■ Οι άλλες ταινίες είναι αρχικά κενές, με την κεφαλή στο αριστερότερο άκρο της καθεμιάς

■ Αρχική είσοδος με είσοδο  $w$ :  $(q, (\underline{\sqcup} w, \underline{\sqcup}, \dots, \underline{\sqcup}))$ . Δηλαδή, είσοδος στην πρώτη ταινία, οι υπόλοιπες είναι κενές.

## Μηχανές Turing πολλαπλών ταινιών

Μια γλώσσα  $A$  είναι αναγνωρίσιμη, σημαίνει από TM  $M$  μονής ταινίας (1-ταινίας).

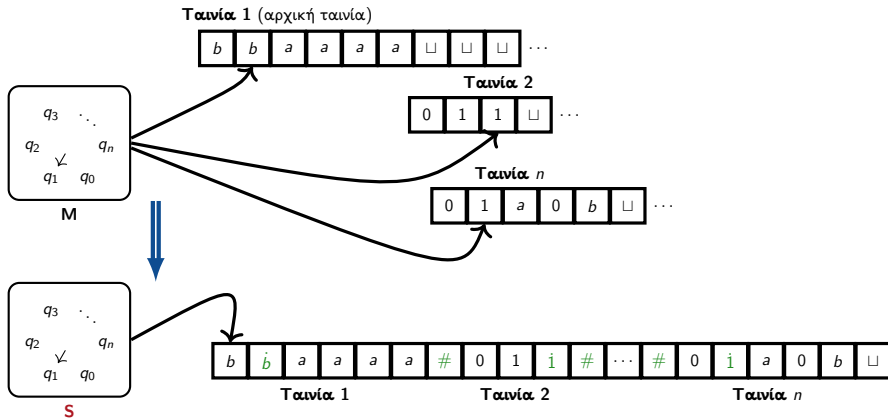
**Θεώρημα.** Μια γλώσσα  $A$  είναι αναγνωρίσιμη ανν είναι αναγνωρίσιμη από TM  $M$  πολλαπλών ταινιών.

**Απόδειξη.** Το ευθύ είναι άμεσο. Για το αντίστροφο έχουμε το εξής:

- Μετατρέπουμε την  $M$  σε TM 1-ταινίας, έστω  $S$ .
- Η  $S$  προσομοιώνει την  $M$  αποθηκεύοντας τα περιεχόμενα των ταινιών της  $M$  σε κομμάτια, διαχωριζόμενα από το σύμβολο  $\#$ .
- Καταγράφει την θέση που βρίσκεται η κεφαλή της κάθε ταινίας με ειδικό σύμβολο ( $\dot{a}$  αντί για  $a$ ).

## Μηχανές Turing πολλαλών ταινιών

### Απόδειξη. (συνέχεια)



## Μηχανές Turing πολλαλών ταινιών

π.χ., Έστω η TM  $M$  με 3-ταινίες, αλφάβητο ταινιών  $\Gamma = \{\sqcup, 0, 1\}$ . Μια μετάβαση μπορεί να έχει την μορφή

$$\delta(q, 0, 1, 1) = (p, 1, 1, 0, R, R, L).$$

Υποθέτουμε ότι έχει και τις μεταβάσεις  $\delta(q, x, \sqcup, \sqcup) = (p, x, 0, \sqcup, R, R, L)$ ,  $\forall x \in \Gamma$ .

Θέλουμε να κάνουμε μερικά βήματα στον υπολογισμό της  $w = 101$ ,

$$\begin{aligned} (q, (\sqcup 101, \sqcup, \sqcup)) &\rightarrow (q, (\underline{1}01, \sqcup, \sqcup)) \vdash_M (q, (1\underline{0}1, 0\underline{\sqcup}, \sqcup)) \\ &\vdash_M (q, (10\underline{1}\sqcup, 00\underline{\sqcup}, \sqcup)) \vdash_M \dots \end{aligned}$$

□

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

Μια μη-ντετερμινιστική TM όταν βρίσκεται σε μια δεδομένη κατάσταση και διαβάζει ένα σύμβολο από την ταινία, μπορεί να έχει περισσότερες από μια δυνατές επιλογές μετάβασης.

**Ορισμός.** Μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing (NTM) είναι μια επτάδα  $(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  με συνάρτηση μετάβασης

$$\delta : K \times \Gamma \rightarrow 2^{K \times \Gamma \times \{R, L\}}.$$

π.χ.,  $\delta(q, \sigma) = \{(q, \sigma, L), (p, \tau, R), (r, \nu, L)\}.$

■ Η σχέση  $\vdash_M$  **δεν** είναι μονοσήμαντη. [από μια συνολική κατάσταση μπορούν να παραχθούν πολλές σε κάθε βήμα]

■ Στις NTM ο υπολογισμός είναι ένα δέντρο.

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

■ Για κάθε ζεύγος (κατάσταση, σύμβολο) της NTM  $N$  έχουμε το πολύ  $\mu = 2 \cdot |K| \cdot |\Gamma|$  επιλογές, κάθε υπολογισμός της  $N$  κωδικοποιείται και αντιστοιχίζεται ως μια συμβολοσειρά από το σύνολο  $\{1, 2, \dots, \mu\}$ .

π.χ., Έστω οι μη-ντετερμινιστικές μεταβάσεις

$$\begin{aligned}\delta(s, \sigma) &= \{(s, \sigma, L), (r, \sigma, R)\} \\ \delta(r, \sigma) &= \{(p, \sigma, R), (r, \tau, L), (s, \sqcup, R)\} \\ \delta(p, \sqcup) &= \{(p, \sigma, L), (q_{acc}, \sqcup, R)\}\end{aligned}$$

Το  $\mu$  είναι  $\{111, 112, 121, \dots, 131, \dots, 212, \dots, 232\}$ .

■ Ποιος θα είναι ο υπολογισμός της  $w = \sigma\sigma$ ;

$$(s, \underline{\sigma}\sigma) \vdash_M (r, \sigma\underline{\sigma}) \vdash_M (p, \sigma\sigma\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_{acc}, \sigma\sigma \sqcup \underline{\sqcup}) \rightsquigarrow 212.$$

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

π.χ., (συνέχεια) Έστω οι μη-ντετερμινιστικές μεταβάσεις

$$\delta(s, \sigma) = \{(s, \sigma, L), (r, \sigma, R)\}$$

$$\delta(r, \sigma) = \{(p, \sigma, R), (r, \tau, L), (s, \sqcup, R)\}$$

$$\delta(p, \sqcup) = \{(p, \sigma, L), (q_{acc}, \sqcup, R)\}$$

Το  $\mu$  είναι  $\{111, 112, 121, \dots, 131, \dots, 212, \dots, 232\}$ .

■ Ποιος θα είναι ο υπολογισμός της  $w = \sigma\sigma$ ;

$$(s, \underline{\sigma}\sigma) \vdash_M (r, \sigma\underline{\sigma}) \vdash_M (p, \sigma\sigma\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_{acc}, \sigma\sigma \sqcup \underline{\sqcup}) \rightsquigarrow 212.$$

$$(s, \underline{\sigma}\sigma) \vdash_M (s, \underline{\sigma}\sigma) \vdash_M (s, \underline{\sigma}\sigma) \vdash_M \dots$$

$$(s, \underline{\sigma}\sigma) \vdash_M (s, \underline{\sigma}\sigma) \vdash_M (r, \sigma\underline{\sigma}) \vdash_M \dots$$

□

■ Έχουμε δηλαδή ένα **δέντρο** για τον υπολογισμό της  $w$ ,  $N(w)$ .

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing - Υπολογισμοί

■ Η  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej})$  **αποδέχεται την συμβολοσειρά  $w$  αν  $\exists$  υπολογισμός  $(q_0, w) \vdash_M^* (q_{acc}, w')$  [πάλι στο  $(q_0, w)$  η κεφαλή διαβάζει το 1ο σύμβολο της  $w$ ]**

■ Δηλαδή, υπάρχει ένας κλάδος του υπολογισμού της  $M$  που οδηγεί σε μια κατάσταση αποδοχής.

■ Η  $M$  **ημιαποφασίζει** μια γλώσσα  $A$  αν ισχύει

$$w \in A \text{ ανν } M \text{ δέχεται την } w.$$

■ Η  $M$  **αποφασίζει** μια γλώσσα  $A$  αν για κάθε

- όλοι οι υπολογισμοί της  $M$  με είσοδο  $w$  τερματίζουν
- $w \in A$  ανν η  $M$  δέχεται την  $w$ .

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

**Θεώρημα.** Για κάθε NTM  $N$  υπάρχει ισοδύναμη TM  $M$ .

**Απόδειξη.** Διαισθητικά, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε NTM  $N$  μπορεί να προσομοιωθεί από μια TM  $M$ .

**Ιδέα.** Για κάθε είσοδο  $w$ , στην  $M$  εκτελούμε τη συστηματική διάσχιση του δέντρου που σχηματίζεται για όλες τις πιθανές μεταβάσεις της  $N$  για είσοδο  $w$ .

- Θα πρέπει να δοκιμάσουμε όλα τα πιθανά κλαδιά στο δέντρο υπολογισμού της  $N$ .
- Για την διερεύνηση χρησιμοποιούμε BFS. [Γιατί όχι DFS;]
- Έτσι η  $M$  θα επισκέπτεται κάθε φορά όλους τους κόμβους που βρίσκονται στο ίδιο βάθος, μέχρι να καταφέρει να βρει μια συνολική κατάσταση αποδοχής (αν υπάρχει).

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

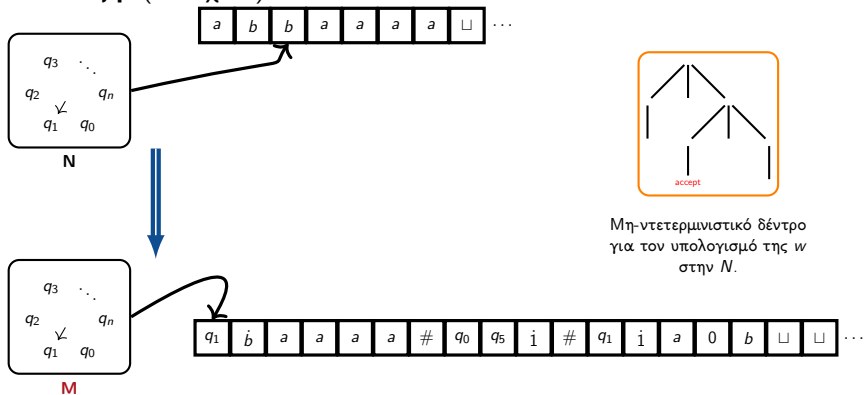
**Θεώρημα.** Για κάθε NTM  $N$  υπάρχει ισοδύναμη TM  $M$ .

### Απόδειξη.

- Ορίζουμε  $M$  που προσομοιώνει την  $N$ .
- Η  $M$  χρησιμοποιεί **BFS στο δέντρο** υπολογισμού της  $N(w)$ .
- Έστω  $d$  το μέγιστο πλήθος συνολικών καταστάσεων που παράγονται από κάποια συνολική κατάσταση.
- Κάθε  $d$ -αδικός αριθμός μήκους  $k$  προσδιορίζει μια ακολουθία  $\leq k$  βημάτων στο δέντρο υπολογισμού της  $N(x)$ .
- Η  $M$  γράφει  $d$ -αδικούς αριθμούς μήκους  $1, 2, \dots$  και προσομοιώνει αντίστοιχους ντετερμινιστικούς υπολογισμούς μέχρι είτε
  - κάποιος υπολογισμός τερματίζει σε αποδοχή ( $M$  αποδέχεται)
  - είτε όλοι οι υπολογισμοί μήκους  $\leq k$  τερματίζουν σε απόρριψη ( $M$  απορρίπτεται)
- Αν  $t(|w|)$  ύψος δέντρου, χρόνος προσομοίωσης  $O(d^{t|w|})$ .

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

Απόδειξη. (συνέχεια)



□

## Μη-ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

**Θεώρημα.** Για κάθε NTM  $N$  υπάρχει ισοδύναμη TM  $M$ .

**Απόδειξη.** (Εναλλακτικά) Η  $M$  χρησιμοποιεί 3 ταινίες.

1η αποθηκεύει την **είσοδο** και δεν την τροποποιεί.

2η αντίγραφο της ταινίας της  $N$ . [προσομοιώνει την λειτουργία της  $N$ ]

3η καταχωρεί την τρέχουσα συμβολοσειρά από το  $[\mu]$ .  $[[\mu] = \{1, 2, \dots, \mu\}]$

Παράγει στην 3η ταινία την 1η συμβολοσειρά από  $[\mu]$  (λεξικογραφική σειρά).

Για κάθε τέτοια συμβολοσειρά  $z$ , αντιγράφει στην 2η ταινία την **είσοδο** και προσομοιώνει την  $N$  με βάση  $z$ .

Αν κάποιο ψηφίο της  $z$  δεν αντιστοιχεί σε μετάβαση της  $N$  ή  $M$  δεν είναι σε κατάσταση  $\{q_{acc}, q_{rej}\}$  με το τέλος της  $z$ , η  $M$  σβήνει την 2η ταινία και παράγει στην 3η ταινία την επόμενη συμβολοσειρά από  $[\mu] \Rightarrow$  Η  $M$  αποδέχεται αν η  $N$  αποδέχεται. □

## Υπολογίσιμες συναρτήσεις

- Κάθε φυσικός αριθμός  $n$  μπορεί να κωδικοποιηθεί στην ταινία εισόδου.
- Άρα και κάθε πλειάδα φυσικών αριθμών  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ .
- Έστω  $\phi$  μερική συνάρτηση  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . [δεν ορίζεται σε όλο το πεδίο ορισμού]
- Έστω TM  $M$  και  $\phi$  μερική συνάρτηση  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , όπου για τις  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  που ορίζεται έχουμε,

$$\phi(n_1, n_2, \dots, n_k) = m.$$

## Υπολογίσιμες συναρτήσεις

■ Η  $M$  **υπολογίζει** την  $\phi$  αν για κάθε  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  ισχύει ένα από τα εξής,

1 Αν  $\phi(n_1, n_2, \dots, n_k)$  ορίζεται,

- Η  $M$  εκτελεί με  $n_1, n_2, \dots, n_k$  κωδικοποιημένη στην ταινία, αρχικά.
- Τερματίζει στην  $q_{acc}$  με  $n_1, n_2, \dots, n_k, m$  στην ταινία.

2 Αν  $\phi(n_1, n_2, \dots, n_k)$  δεν ορίζεται,

- Η  $M$  εκτελεί με  $n_1, n_2, \dots, n_k$  κωδικοποιημένη στην ταινία, αρχικά.
- Είτε τερματίζει στην  $q_{rej}$ , είτε αποτυγχάνει να τερματίσει.

■ Μια συνάρτηση  $\phi$  λέγεται **υπολογίσιμη** αν υπάρχει TM  $M$  που την υπολογίζει.

## Υπολογίσιμες συναρτήσεις

π.χ., Έστω η συνάρτηση  $\phi(n) = 2n$  και η κωδικοποίηση γίνεται στο μοναδιαίο σύστημα αρίθμησης (unary).

Χωρίζουμε την ταινία στο κομμάτι της εισόδου και στο κομμάτι της εξόδου, χρησιμοποιώντας ένα ειδικό σύμβολο, έστω  $\#$ . Αρχικά, αριστερά του  $\#$  είναι η είσοδος, η κωδικοποίηση του  $n$ , και δεξιά του  $\#$  κενή.

$M =$  "Για είσοδο  $n$  :

1. Χωρίζουμε την ταινία χρήσει  $\#$ .
2. Διέγραψε τον αριστερότερο 1 από την συμβολσειρά πριν  $\#$ .
3. Διέτρεξε όλη την είσοδο, το  $\#$  και την έξοδο και γράψε 11.
4. Διέτρεξε την ταινία προς τα αριστερά μέχρι να βρεις τον πρώτο 1 πριν το  $\#$ .
5. Επανέλαβε 2.-4..
6. Αν κανένας 1 πριν  $\#$ , αποδέξου."

