



ΗΥ - 280 Θεωρία Υπολογισμού

Διάλεξη 3

Κωνσταντίνος Βάρσος

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών – Πανεπιστήμιο Κρήτης

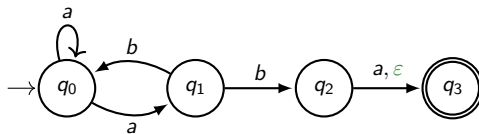
Χειμερινό εξάμηνο 2025 - 26

Γλώσσες και Αυτόματα

Τι είδαμε στην Διάλεξη 2

- Παραδείγματα DFA.
- ✓ Κλειστότητα ένωσης.
- ✗ Κλειστότητα παράθεσης.
- Μη-ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα DFA.

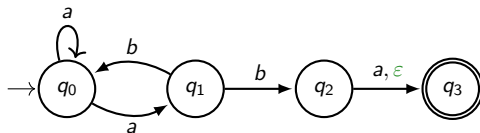
Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα



Νέο είδος μετάβασης, ϵ .

Η ϵ -μετάβαση θεωρείται μια μετάβαση **χωρίς** κόστος. [δεν διαβάζει κανένα bit πληροφορίας.]

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα



- **Ντετερμινισμός**, κάθε επόμενη κατάσταση **καθορίζεται** από την τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
- **Μη-ντετερμινισμός**, κάθε επόμενη κατάσταση **καθορίζεται μερικώς** από την τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
- ! Τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου: υπάρχουν καμία ή περισσότερες επόμενες καταστάσεις.

Το αυτόματο μεταβαίνει **ταυτόχρονα** στις επόμενες καταστάσεις σε μια κίνηση.

Η Μηχανή μαντεύει σωστά. Όλες οι εναλλακτικές εκτελούνται την ίδια στιγμή.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Ορισμός. Ένα μη-ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (NFA) είναι μια πεντάδα όπου

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

K , πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων,

Σ , πεπερασμένο αλφάβητο,

δ , συνάρτηση μετάβασης, $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^K$, $[\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}]$

[Αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια της σχέσης μετάβασης τότε θα χρειαστεί να αλλάξουμε την δ σε $\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$]

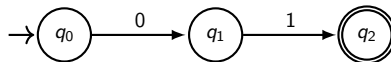
s , αρχική κατάσταση,

F , σύνολο τελικών καταστάσεων.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Δίνεται η γλώσσα $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ τερματίζει με } 01\}$. Βρείτε το NFA που αναγνωρίζει την A .

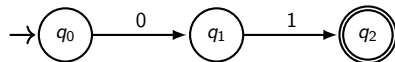
Αρχικά θα σχεδιάσουμε το αυτόματο που αναγνωρίζει την μικρότερη σε μήκος συμβολοσειρά της A , η οποία είναι η **01**.



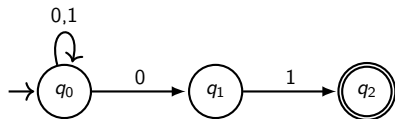
Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Δίνεται η γλώσσα $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ τερματίζει με } 01\}$. Βρείτε το NFA που αναγνωρίζει την A .

Αρχικά θα σχεδιάσουμε το αυτόματο που αναγνωρίζει την μικρότερη σε μήκος συμβολοσειρά της A , η οποία είναι η **01**.



Το αυτόματο θα πρέπει να αναγνωρίζει κάθε συμβολοσειρά της μορφής **x01** όπου x οποιαδήποτε συμβολοσειρά του $\{0,1\}^*$. Άρα το αυτόματο θα πάρει την μορφή

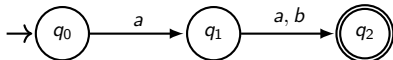


□

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Δίνεται η γλώσσα $B = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ με δεύτερο στοιχείο από το τέλος το } a\}$.
Βρείτε το NFA που αναγνωρίζει την B .

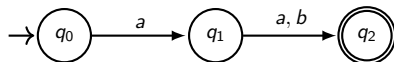
Αρχικά θα σχεδιάσουμε το αυτόματο που αναγνωρίζει την μικρότερη σε μήκος συμβολοσειρά της A , η οποία είναι η ax , με $x \in \{a, b\}$.



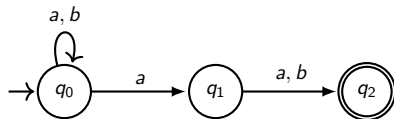
Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Δίνεται η γλώσσα $B = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ με δεύτερο στοιχείο από το τέλος το } a\}$.
Βρείτε το NFA που αναγνωρίζει την B .

Αρχικά θα σχεδιάσουμε το αυτόματο που αναγνωρίζει την μικρότερη σε μήκος συμβολοσειρά της A , η οποία είναι η ax , με $x \in \{a, b\}$.



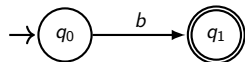
Το αυτόματο θα πρέπει να αναγνωρίζει κάθε συμβολοσειρά της μορφής yax όπου y οποιαδήποτε συμβολοσειρά του $\{a, b\}^*$ και $x \in \{a, b\}$. Άρα το αυτόματο θα πάρει την μορφή



Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Δίνεται η γλώσσα $C = \{aa, aab\}^*\{b\}$. Βρείτε το NFA που αναγνωρίζει την C .

Το αυτόματο αναγνωρίζει συμβολοσειρές που τελειώνουν με b . Άρα σίγουρα θα είναι



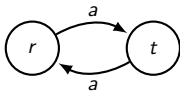
Αν παρατηρήσουμε το πρόθεμα $\{aa, aab\}^*$ θα δούμε ότι αποτελείται από τις συμβολοσειρές $\{\varepsilon, aa, aab, aaaa, aaaaab, aabaa, aabaab, aaaaaa, \dots\}$.

Το ένα μέρος έχει αποκλειστικά άρτιο αριθμό a , ενώ το δεύτερο εμφανίζει την ακολουθία aab .

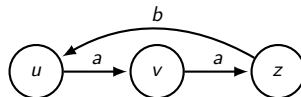
Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια),

aa



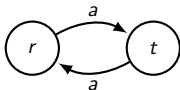
aab



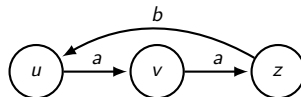
Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια),

aa



aab

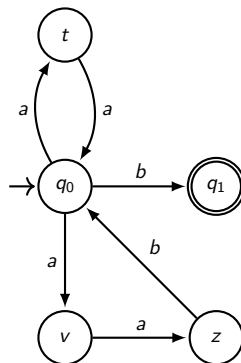


Πρέπει το πέρασμα από το κομμάτι aa στο κομμάτι aab να γίνεται κατά το δοκούν.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια),

Το επιτυγχάνουμε επιλέγοντας $q_0 \equiv r \equiv u$, όπου q_0 η αρχική κατάσταση του αρχικού αυτόματου.



Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Κατά τα γνωστά,

Ένα NFA M δέχεται μια συμβολοσειρά $w = w_1 w_2 \dots w_n$, όπου $w_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, αν υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $p_0, p_1, \dots, p_n \in K$ (όχι αναγκαστικά διακριτή) τ.ω.

- $p_0 = q_0$
- $p_i = \delta(q_{i-1}, w_i), 1 \leq i \leq n$
- $p_n \in F$,

δηλαδή καταλήγει σε κάποια κατάσταση του F .

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ δέχεται την } w\}$$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Κλειστότητα μεταβάσεων

Για ένα NFA $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ και μια κατάσταση $q \in K$, η ε -**κλειστότητα** της q , γράφεται ως $cl_\varepsilon(\{q\})$, είναι το σύνολο των προσβάσιμων καταστάσεων από την q εκτελώντας μόνο ε προσπελάσεις (οσοδήποτε φορές!).

$$cl_\varepsilon(\{q\}) = \{p \in K \mid q \xrightarrow{\varepsilon^*} p\}.$$

Για ένα σύνολο S , όπου $S \subseteq K$:

$$cl_\varepsilon(\{S\}) = \bigcup_{q \in S} cl_\varepsilon(\{q\}).$$

■ Επίσης, ισχύει $\delta(q, \varepsilon) = cl_\varepsilon(q)$, $\forall q \in K$.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

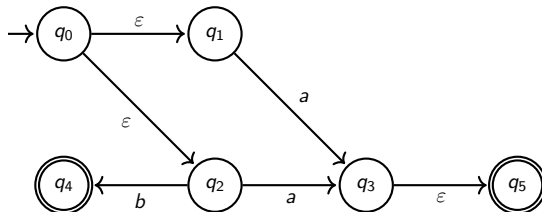
π.χ., Θεωρούμε το NFA με πίνακα μεταβάσεων

	a	b	ε
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $\text{cl}_\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0, q_2\},$
- $\text{cl}_\varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\},$
- $\text{cl}_\varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2\}.$

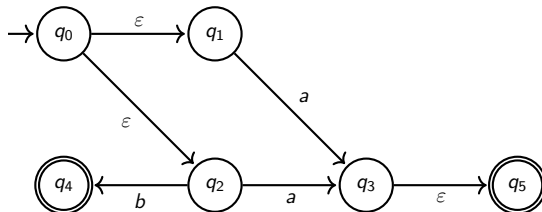
Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Μετάβαση, $\tilde{\delta}(q, a) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q), a))$.



Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Μετάβαση, $\tilde{\delta}(q, a) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q), a))$.



- $\text{cl}_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$,
- $\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_0), a) = \delta(\{q_0, q_1, q_2\}, a) = q_3$,
- $\text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_0), a)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, a)) = \text{cl}_\varepsilon(q_3) = \{q_3, q_5\}$.



Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Ανάλυση της μετάβασης $\tilde{\delta}(q, a) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q), a))$.

Στο NFA με ε μεταβάσεις όταν η q διαβάζει a μπορούν να συμβούν οι εξής περιπτώσεις:

- 1 πάει απευθείας στην p μέσω μιας μη- ε -μεταβάσης που έχει ετικέτα a . $[q \xrightarrow{a} p]$
- 2 αρχικά πάει απευθείας στην r μέσω ε μεταβάσης και έπειτα στην p μέσω μιας μη- ε μεταβάσης που έχει ετικέτα a . $[q \xrightarrow{\varepsilon} r \xrightarrow{a} p]$
- 3 αρχικά πάει απευθείας στην r μέσω μιας μη- ε μεταβάσης που έχει ετικέτα a και έπειτα στην p μέσω ε μετάβασης. $[q \xrightarrow{a} p \xrightarrow{\varepsilon} z]$
- 4 αρχικά πάει απευθείας στην r μέσω ε μεταβάσης και έπειτα στην p μέσω μιας μη- ε μεταβάσης που έχει ετικέτα a και τέλος στην z μέσω ε μετάβασης. $[q \xrightarrow{\varepsilon} r \xrightarrow{a} p \xrightarrow{\varepsilon} z]$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Ανάλυση της μετάβασης $\tilde{\delta}(q, a) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q), a))$.

■ Εστιάζουμε στην 4η περίπτωση γιατί υπερκαλύπτει τις υπόλοιπες.

■ $q \xrightarrow{\varepsilon} r$, σημαίνει $\text{cl}_\varepsilon(q)$ πάει στο r .

■ $r \xrightarrow{a} p$, σημαίνει $\delta(r, a) = p$.

■ $p \xrightarrow{\varepsilon} z$, σημαίνει $\text{cl}_\varepsilon(p)$ πάει στο z .

Δηλαδή,

$$z = \text{cl}_\varepsilon(p) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(r, a)) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q), a)).$$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

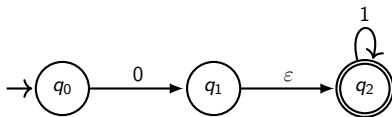
Αλγόριθμος διαγραφής ε -μεταβάσεων

Ένα NFA με ε μπορεί να μετατραπεί σε NFA χωρίς ε με τον εξής **αλγόριθμο**,

- 1 Βρίσκουμε όλες τις ε -μεταβάσεις από κάθε κατάσταση του K . Αυτό είναι η ε – κλειστότητα $\{q_i\}$ όπου $q_i \in K$.
- 2 Στη συνέχεια, δημιουργούμε τις μεταβάσεις $\tilde{\delta}$. $[\tilde{\delta}(q, a) = \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q), a))]$, για $q \in K$, $a \in \Sigma]$
- 3 Επαναλαμβάνουμε το **βήμα 2** για κάθε σύμβολο εισόδου και κάθε κατάσταση του δεδομένου NFA.
- 4 Χρησιμοποιούμε τις προκύπτουσες καταστάσεις, μπορεί να κατασκευαστεί ο πίνακας μεταβάσεων για το ισοδύναμη NFA χωρίς ε -μεταβάσεις.

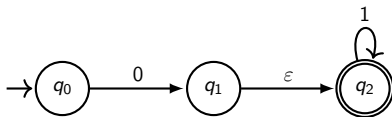
Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Έστω το ακόλουθο NFA με ε .



Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Έστω το ακόλουθο NFA με ε .

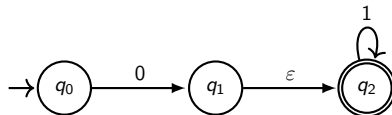


Αρχικά βρίσκουμε όλες τις ε μεταβάσεις

$$cl_{\varepsilon}(q_0) = \{q_0\}, \quad cl_{\varepsilon}(q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad cl_{\varepsilon}\{q_2\} = \{q_2\}.$$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια) Έστω το ακόλουθο NFA με ε .



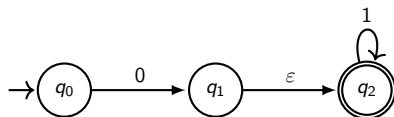
Δημιουργούμε τις μεταβάσεις $\tilde{\delta}$ για την q_0 ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\delta}(q_0, 0) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_0), 0)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_0, 0)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(q_1) \\
 &= \{q_1, q_2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\delta}(q_0, 1) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_0), 1)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_0, 1)) \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια)



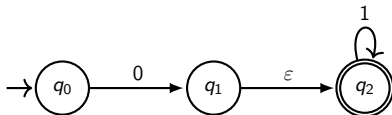
Δημιουργούμε τις μεταβάσεις $\tilde{\delta}$ για την q_1 ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\delta}(q_1, 0) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_1), 0)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_1, q_2\}, 0)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\emptyset \cup \emptyset) \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\delta}(q_1, 1) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_1), 1)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\{q_1, q_2\}, 1)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\emptyset \cup q_2) \\
 &= \{q_2\}
 \end{aligned}$$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια)



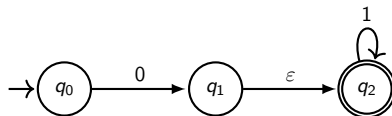
Δημιουργούμε τις μεταβάσεις $\tilde{\delta}$ για την q_2 ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\delta}(q_2, 0) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_2), 0)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 0)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\emptyset) \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\delta}(q_2, 1) &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(\text{cl}_\varepsilon(q_2), 1)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(\delta(q_2, 1)) \\
 &= \text{cl}_\varepsilon(q_2) \\
 &= \{q_2\}
 \end{aligned}$$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια) Έστω το ακόλουθο NFA με ε .

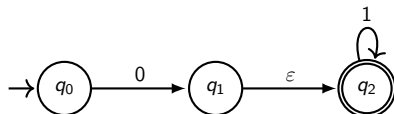


Συγκεντρωτικά οι μεταβάσεις $\tilde{\delta}$ είναι,

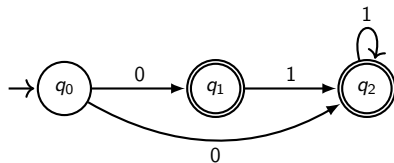
	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., (συνέχεια) το ακόλουθο NFA με ε -μεταβάσεις είναι,



Άρα το ισοδύναμο NFA χωρίς ε -μεταβάσεις είναι,



Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

NFA vs DFA

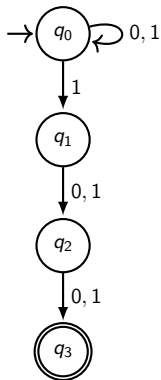
Ντετερμινιστικός υπολογισμός	Μη-ντετερμινιστικός υπολογισμός
1. (κατάσταση, σύμβολο) $\rightarrow$ μοναδική κατάσταση 2. ένα μοναδικό υπολογιστικό μονοπάτι 3. ο υπολογισμός βρίσκεται σε μια και μοναδική κατάσταση σε κάθε βήμα 4. η είσοδος γίνεται δεκτή αν το μονοπάτι υπολογισμών καταλήγει σε τερματική κορυφή 5. η είσοδος δεν γίνεται δεκτή αν το μονοπάτι υπολογισμών δεν καταλήγει σε τερματική κορυφή 6. δεν επιτρέπονται μεταβάσεις ε	(κατάσταση, σύμβολο) $\rightarrow$ πολλαπλές καταστάσεις πολλαπλά υπολογιστικά μονοπάτια ο υπολογισμός βρίσκεται σε ένα σύνολο από καταστάσεις σε κάθε βήμα η είσοδος γίνεται δεκτή αν τουλάχιστον ένα από τα μονοπάτια υπολογισμών καταλήγει σε τερματική κορυφή η είσοδος γίνεται δεν δεκτή αν κανένα από τα μονοπάτια υπολογισμών καταλήγει σε τερματική κορυφή επιτρέπονται μεταβάσεις ε

NFA vs DFA

π.χ., Έστω η γλώσσα $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ έχει } 1 \text{ στην } 3\text{η θέση από το τέλος}\}$.

NFA vs DFA

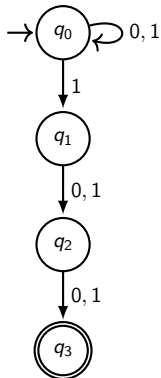
π.χ., Έστω η γλώσσα $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ έχει } 1 \text{ στην } 3\text{η θέση από το τέλος}\}$.

NFA

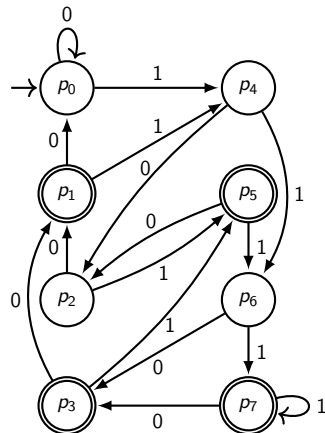
NFA vs DFA

π.χ., Έστω η γλώσσα $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ έχει } 1 \text{ στην } 3\text{η θέση από το τέλος}\}$.

NFA



DFA



Μετατροπή NFA σε DFA

Παρατηρήσεις

- Ένα DFA είναι και NFA. [δεν χρησιμοποιεί τον μη-ντετερμινισμό]
- Αν $\mathcal{N}$ είναι η κλάση όλων των γλωσσών που αναγνωρίζεται από κάποιο NFA, τότε οι κανονικές γλώσσες είναι υποσύνολο της $\mathcal{N}$.
- Ισχύει το αντίστροφο;