



ΗΥ - 280 Θεωρία Υπολογισμού

Διάλεξη 2

Κωνσταντίνος Βάρσος

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών – Πανεπιστήμιο Κρήτης

Χειμερινό εξάμηνο 2025 - 26

Γλώσσες και Αυτόματα

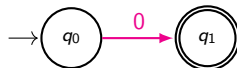
Τι είδαμε στην Διάλεξη 1

- Διαδικαστικά και Ιστορική αναδρομή.
- Βασικό υπόβαθρο.
- Αναπαράσταση και Γλώσσες – βασικές έννοιες.
- $|\Sigma^*|$ συμβολοσειρές, αλλά $|2^{\Sigma^*}|$ γλώσσες.
- Αυτόματα Πεπερασμένων Καταστάσεων DFA.

Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0\}$, βρείτε το DFA που δέχεται ακριβώς ένα 0.

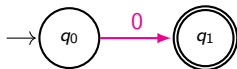
Ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση q_0 , όταν διαβάσει 0, μεταβαίνει στην τελική κατάσταση q_1 .



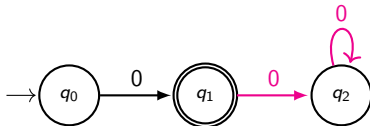
Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0\}$, βρείτε το DFA που δέχεται ακριβώς ένα 0.

Ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση q_0 , όταν διαβάσει 0, μεταβαίνει στην τελική κατάσταση q_1 .



Ορίζουμε τις μεταβάσεις από την q_1 : Αν διαβάσουμε οποιοδήποτε σύμβολο στην q_1 τότε θα πρέπει να εμφανίζεται μη-αποδεκτή συμβολοσειρά.

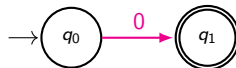


□

Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0\}$, βρείτε το DFA που δέχεται τουλάχιστον ένα 0.

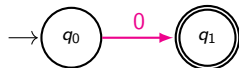
Ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση q_0 , όταν διαβάσει 0, μεταβαίνει στην τελική κατάσταση q_1 .



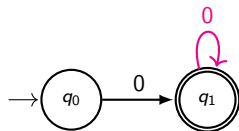
Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0\}$, βρείτε το DFA που δέχεται τουλάχιστον ένα 0.

Ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση q_0 , όταν διαβάσει 0, μεταβαίνει στην τελική κατάσταση q_1 .



Ορίζουμε τις μεταβάσεις από την q_1 : Εφόσον έχουμε διατρέξει ήδη ένα 0, αν διαβάσουμε οποιοδήποτε σύμβολο στην q_1 τότε θα πρέπει να εμφανίζεται αποδεκτή συμβολοσειρά.

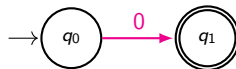


□

Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$, βρείτε το DFA που δέχεται ακριβώς ένα 0.

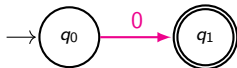
Ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση q_0 , όταν διαβάσει 0, μεταβαίνει στην τελική κατάσταση q_1 .



Πεπερασμένα Αυτόματα

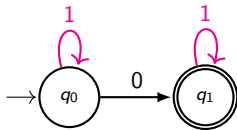
π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$, βρείτε το DFA που δέχεται ακριβώς ένα 0.

Ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση q_0 , όταν διαβάσει 0, μεταβαίνει στην τελική κατάσταση q_1 .



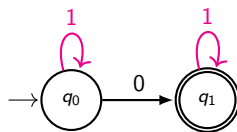
Εξετάζουμε, για κάθε κατάσταση, ποια μετάβαση θα γίνει αν διαβαστεί το σύμβολο 1.

- Αν διαβαστεί 1 στην q_0 , τότε θα πρέπει να παραμείνει στην q_0 .
- Αν διαβαστεί 1 στην q_1 , τότε θα πρέπει να παραμείνει στην q_1 .



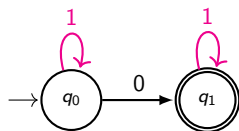
Πεπερασμένα Αυτόματα

(συνέχεια)

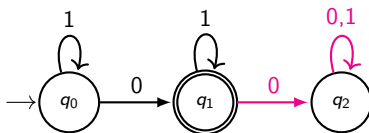


Πεπερασμένα Αυτόματα

(συνέχεια)



Ολοκληρώνουμε προσθέτοντας όλες τις μεταβάσεις ώστε το αυτόματο να γίνει ντετερμινιστικό. Εδώ ίσως να χρειαστεί να προσθέσουμε και επιπλέον καταστάσεις.



■ Η κατάσταση q_2 ονομάζεται και κατάσταση αδιεξόδου.



Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$, βρείτε το DFA που δέχεται περιττό αριθμό 1.

Ξεκινάμε φτιάχνοντας 2 καταστάσεις,



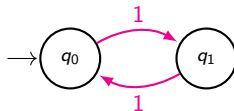
Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Στο αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$, βρείτε το DFA που δέχεται περιττό αριθμό 1.

Ξεκινάμε φτιάχνοντας 2 καταστάσεις,

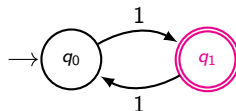


Μια ώστε να μετράμε τον περιττό αριθμό 1, και μια ώστε να μετράμε τον άρτιο αριθμό 1.



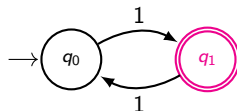
Πεπερασμένα Αυτόματα

(συνέχεια), Τερματική κατάσταση η q_1 .

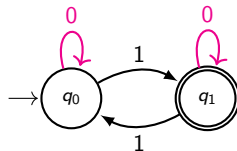


Πεπερασμένα Αυτόματα

(συνέχεια), Τερματική κατάσταση η q_1 .



Συμπληρώνουμε,



Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Κατασκευάστε πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$, οι οποίες είναι δυαδικές αναπαραστάσεις αριθμών πολλαπλάσιων του 3.

Δυαδική αναπαράσταση του 3: $11 = (3)_2$, $110 = (6)_2$, $1001 = (9)_2$, $1100 = (12)_2$, κτλ.

Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ., Κατασκευάστε πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$, οι οποίες είναι δυαδικές αναπαραστάσεις αριθμών πολλαπλάσιων του 3.

Δυαδική αναπαράσταση του 3: $11 = (3)_2$, $110 = (6)_2$, $1001 = (9)_2$, $1100 = (12)_2$, κτλ.

Το DFA θα έχει 3 καταστάσεις. Κάθε κατάσταση αντιπροσωπεύει το υπόλοιπο όταν διαιρείται ο αριθμός με το 3. [$q_0 \rightarrow$ υπόλοιπο 0, $q_1 \rightarrow$ υπόλοιπο 1, $q_2 \rightarrow$ υπόλοιπο 2].

$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ για την γλώσσα L ορίζεται ως εξής:

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \delta : K \times \Sigma \rightarrow K, \quad s = q_0, \quad F = \{q_0\}$$

...

Πεπερασμένα Αυτόματα

(συνέχεια), Πρέπει να κατασκευάσουμε τις μεταβάσεις.

Αν προσθέσουμε 0 σε μια δυαδική συμβολοσειρά η τιμή διπλασιάζεται $k \rightarrow 2k$. [π.χ., $11 = (3)_2 \rightarrow 110 = (6)_2$, $0 = (\varepsilon)_2 \rightarrow 0 = (0)_2$].

Αντίστοιχα, όταν προσθέτουμε 1 η τιμή αλλάζει από k σε $2k + 1$. [π.χ., $11 = (3)_2 \rightarrow 111 = (7)_2$, $0 = (\varepsilon)_2 \rightarrow 1 = (1)_2$].

Πεπερασμένα Αυτόματα

(**συνέχεια**), Πρέπει να κατασκευάσουμε τις μεταβάσεις.

Αν προσθέσουμε 0 σε μια δυαδική συμβολοσειρά η τιμή διπλασιάζεται $k \rightarrow 2k$. [π.χ., $11 = (3)_2 \rightarrow 110 = (6)_2$, $0 = (\varepsilon)_2 \rightarrow 0 = (0)_2$].

Αντίστοιχα, όταν προσθέτουμε 1 η τιμή αλλάζει από k σε $2k + 1$. [π.χ., $11 = (3)_2 \rightarrow 111 = (7)_2$, $0 = (\varepsilon)_2 \rightarrow 1 = (1)_2$].

Στην q_0 :

- Για 0 η τιμή διπλασιάζεται άρα συνεχίζει να είναι διαιρετή με το 3, επομένως παραμένουμε στην q_0 .
- Για 1 η νέα τιμή αφήνει υπόλοιπο 1, οπότε μεταβαίνουμε στην κατάσταση q_1 .

...

Πεπερασμένα Αυτόματα

(συνέχεια)

Στην q_1 :

- Για 0 η τιμή διπλασιάζεται και το υπόλοιπο επίσης διπλασιάζεται, επομένως μεταβαίνουμε στην q_2 .
- Για 1 η νέα τιμή αυξάνεται κατά $2k + 1$ οδηγώντας σε υπόλοιπο $3 = \text{υπόλοιπο } 0$. Έτσι, μεταβαίνουμε στην q_0 .

Στην q_2 :

- Για 0 η τιμή διπλασιάζεται οδηγώντας σε υπόλοιπο $4 = \text{υπόλοιπο } 1$. Έτσι, μεταβαίνουμε στην q_1 .
- Για 1 η νέα τιμή αυξάνεται κατά $2k + 1$ οδηγώντας σε υπόλοιπο $5 = \text{υπόλοιπο } 2$. Έτσι, παραμένουμε στην κατάσταση q_2 .

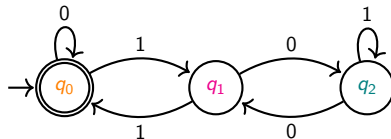
...

Πεπερασμένα Αυτόματα

(συνέχεια)

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_0
q_2	q_1	q_2

Διάγραμμα του DFA



Πεπερασμένα Αυτόματα & Γλώσσες

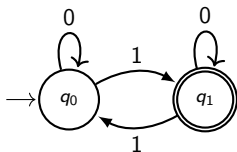
Η έννοια 'δέχεται' (διαβάζεται ως **παράγεται σε ένα βήμα**) μπορεί να οριστεί με την παρακάτω δυαδική σχέση:

$$(q, w) \vdash_M (p, w') \text{ ανν } \begin{cases} w = xw', \\ p = \delta(q, x) \end{cases} \text{ για κάποιο } x \in \Sigma$$

- $H \vdash_M$ είναι μια συνάρτηση $\vdash_M: K \times \Sigma^+ \rightarrow K \times \Sigma^*$.
- Τα στοιχεία του $K \times \Sigma^*$ ονομάζονται **συνολικές καταστάσεις** (configurations).
- Σε DFA: συνολική κατάσταση ορίζεται μονοσήμαντα.

Πεπερασμένα Αυτόματα & Γλώσσες

π.χ. Έστω το DFA και αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$.



$$(q_0, 011010) \vdash_M (q_0, 11010)$$

$$(q_0, 11010) \vdash_M (q_1, 1010)$$

$$(q_1, 1010) \vdash_M (q_0, 010)$$

$$(q_0, 010) \vdash_M (q_0, 10)$$

$$(q_0, 10) \vdash_M (q_1, 0)$$

$$(q_1, 0) \vdash_M (q_1, \varepsilon)$$

Πεπερασμένα Αυτόματα & Γλώσσες

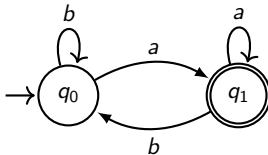
Ορίζουμε την σχέση $\vdash_M^*$ (διαβάζεται ως **παράγεται σε μήδεν ή περισσότερα βήματα**) ως εξής:

$$(q, w) \vdash_M^* (p, w') \text{ ανν } \left\{ \begin{array}{l} \text{υπάρχουν } q_1, \dots, q_n \in K \\ \text{και } \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma \text{ τ.ω.} \end{array} \right.$$

- $w = \sigma_1 \dots \sigma_n w'$
- $(q, \sigma_1 \dots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_n w') \vdash_M \dots \vdash_M (q_n, w')$
- $\delta(q, \sigma_1) = q_1, \delta(q_1, \sigma_2) = q_2, \dots, \delta(q_{n-1}, \sigma_n) = q_n$
- $q_n = p$
- $\vdash_M^* \subseteq K \times \Sigma^* \times K \times \Sigma^*.$

Πεπερασμένα Αυτόματα & Γλώσσες

π.χ., Έστω το DFA και αλφάβητο $\Sigma = \{a, b\}$.



Έστω η λέξη $w = aba$. Για τα βήματα μετάβασης από την q_0 για τη w έχουμε:

$$q_0 \vdash_M (q_0, aba) \vdash_M (q_1, ba) \vdash_M (q_0, a) \vdash_M (q_1, \epsilon)$$

Η ακολουθία αυτή μπορεί να γραφτεί ως:

$$(q_0, aba) \vdash_M^* (q_1, \epsilon)$$

Το w τελειώνει με το σύμβολο a , το αυτόματο M καταλήγει στην τελική κατάσταση q_1 , άρα η λέξη aba παράγεται σε 4 βήματα. $\square$

Πεπερασμένα Αυτόματα & Γλώσσες

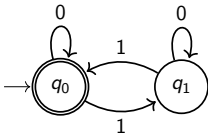
Ορισμός. Λέμε ότι το M **δέχεται την συμβολοσειρά** w ή ότι το w είναι **αποδεκτό** από το M ανν

$$(s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon), \text{ για κάποιο } q \in F$$

Ορισμός. Ορίζουμε την γλώσσα ενός πεπερασμένου αυτόματου $M(K, \Sigma, \delta, s, F)$ σαν το σύνολο των συμβολοσειρών που είναι αποδεκτές από το M

$$L(M) = \{w \mid w \text{ είναι αποδεκτό από το } M\}$$

π.χ.



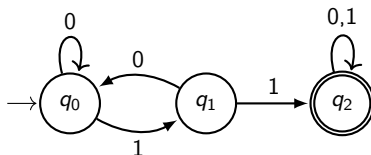
$$L(M) = \{w \mid w \text{ περιέχει άρτιο αριθμό από } 1\}$$

[με μαθηματική επαγωγή.]

Πεπερασμένα Αυτόματα & Γλώσσες

Ορισμός. Μια γλώσσα A λέγεται **κανονική** αν είναι αναγνωρίσιμη από κάποιο πεπερασμένο αυτόματο.

π.χ.



- $L(M) = \{w \mid w \text{ περιέχει την υπό-συμβολοσειρά } 11\} = A$, η A είναι κανονική.
- Δεν είναι όλες οι γλώσσες κανονικές, π.χ., $B = \{w \mid w \text{ περιέχει ίδιο αριθμό } 1 \text{ και } 0\}$.

Κάθε αυτόματο αποδέχεται πολλές συμβολοσειρές, αλλά αναγνωρίζει μια μόνο γλώσσα.

Κλειστότητα

□ **Κλειστότητα.** Λέμε ότι ένα σύνολο γλωσσών A είναι κλειστό ως προς την πράξη $\otimes$ ανν $A_1, A_2 \in A$, τότε $A_1 \otimes A_2 \in A$, $\forall A_1, A_2 \in A$.

□ **Κλειστότητα.** [Για μοναδιαίες πράξεις] Λέμε ότι ένα σύνολο γλωσσών A είναι κλειστό ως προς την πράξη $\otimes$ ανν $A_1 \in A$, τότε $A_1 \otimes \in A$, $\forall A_1 \in A$.

Θεώρημα. Οι κανονικές γλώσσες είναι κλειστές ως προς τις πράξεις ένωση, παράθεση, και Kleene star. [Θα δούμε τις αποδείξεις σε αυτή και στην επόμενη διάλεξη.]

Κλειστότητα

□ Κλειστότητα του τελεστή $\cup$.

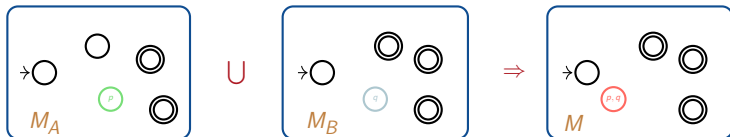
Θεώρημα. Αν οι γλώσσες A , B είναι κανονικές, τότε και η γλώσσα $A \cup B$ είναι κανονική.

Απόδειξη.

- 1 Έστω το αυτόματο M_A που αναγνωρίζει την A και M_B το αυτόματο που αναγνωρίζει την B .

$$M_A = (K_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A), \quad M_B = (K_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$$

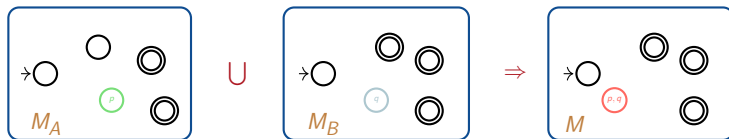
- 2 Κατασκευάζουμε αυτόματα M το οποίο να αναγνωρίζει την $A \cup B$.
- 3 Το M πρέπει να αναγνωρίζει είσοδο w αν είτε το M_A ή το M_B δέχονται το w .



Κλειστότητα για Κανονικές Εκφράσεις

Απόδειξη (συνέχεια).

Το M πρέπει να αναγνωρίζει είσοδο w αν είτε το M_A ή το M_B δέχονται το w .



- $K_M = K_A \times K_B = \{(p, q) \mid p \in K_A \wedge q \in K_B\}$. Συνεπώς, $|K_M| = |K_A| \cdot |K_B|$.
- Το αλφάβητο παραμένει αμετάβλητο.
- $s = (q_A, q_B)$.
- $\delta((p, q), a) = (\delta_A(p, a), \delta_B(q, a))$.
- $F = (F_A \times K_B) \cup (K_A \times F_b)$. $\square$

$\square$ Ισχύει $F = F_A \times F_b$;

Κλειστότητα για Κανονικές Εκφράσεις

π.χ. Έστω αυτόματα $M_A = (K_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ και $M_B = (K_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$, αντίστοιχα, με $\Sigma = \{0, 1\}$. Βρείτε το $M = M_1 \cup M_2$.

M_A :

M_B :

$$K_A : \{q_0, q_1\}$$

$$K_B : \{p_0, p_1\}$$

$$s_A : q_0$$

$$s_B : p_0$$

$$F_A : q_1$$

$$F_B : p_0$$

$$\delta_A :$$

$$\delta_B :$$

$$\delta(q_0, 0) = q_0$$

$$\delta(p_0, 0) = p_0$$

$$\delta(q_0, 1) = q_1$$

$$\delta(p_0, 1) = p_1$$

$$\delta(q_1, 1) = q_1$$

$$\delta(p_1, 1) = p_1$$

$$\delta(q_1, 0) = q_0$$

$$\delta(p_1, 0) = p_0$$

Κλειστότητα για Κανονικές Εκφράσεις

π.χ. Έστω αυτόματα $M_A = (K_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ και $M_B = (K_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$, αντίστοιχα, με $\Sigma = \{0, 1\}$. Βρείτε το $M = M_1 \cup M_2$.

M_A :

M_B :

$M = M_1 \cup M_2$:

$$K_A : \{q_0, q_1\}$$

$$s_A : q_0$$

$$F_A : q_1$$

$$\delta_A :$$

$$\delta(q_0, 0) = q_0$$

$$\delta(q_0, 1) = q_1$$

$$\delta(q_1, 1) = q_1$$

$$\delta(q_1, 0) = q_0$$

$$K_B : \{p_0, p_1\}$$

$$s_B : p_0$$

$$F_B : p_0$$

$$\delta_B :$$

$$\delta(p_0, 0) = p_0$$

$$\delta(p_0, 1) = p_1$$

$$\delta(p_1, 1) = p_1$$

$$\delta(p_1, 0) = p_0$$

$$K : \{(q_0, p_0), (q_1, p_0), (q_0, p_1), (q_1, p_1)\}$$

$$s : (q_0, p_0)$$

$$F : \{(q_0, p_0), (q_0, p_1), (q_1, p_0), (q_1, p_1)\}$$

Μεταβάσεις δ :

$$\delta((q_0, p_0), 0) = (q_0, p_0), \delta((q_0, p_0), 1) = (q_1, p_1)$$

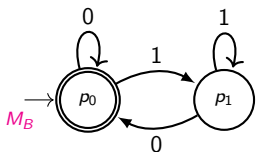
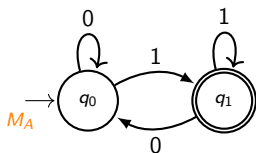
$$\delta((q_1, p_1), 1) = (q_1, p_1), \delta((q_1, p_1), 0) = (q_0, p_0)$$

$$\delta((q_1, p_0), 0) = (q_0, p_0), \delta((q_1, p_0), 1) = (q_1, p_1)$$

$$\delta((q_0, p_1), 1) = (q_1, p_1), \delta((q_0, p_1), 0) = (q_0, p_0)$$

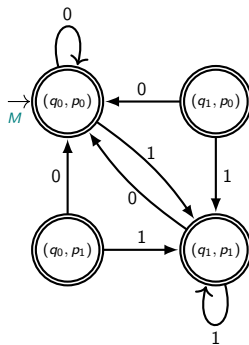
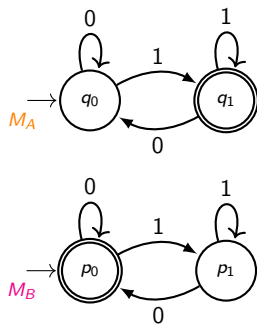
Κλειστότητα για Κανονικές Εκφράσεις

π.χ. Έστω αυτόματα $M_A = (K_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ και $M_B = (K_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$, αντίστοιχα, με $\Sigma = \{0, 1\}$. Βρείτε το $M = M_1 \cup M_2$.



Κλειστότητα για Κανονικές Εκφράσεις

π.χ. Έστω αυτόματα $M_A = (K_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ και $M_B = (K_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$, αντίστοιχα, με $\Sigma = \{0, 1\}$. Βρείτε το $M = M_1 \cup M_2$.



Κλειστότητα για Κανονικές Εκφράσεις

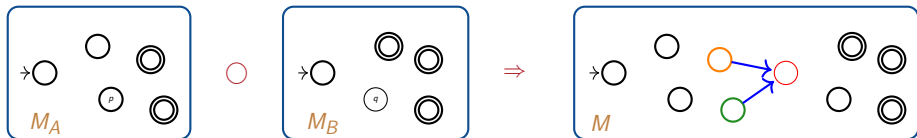
□ Κλειστότητα του τελεστή $\circ$.

Θεώρημα. Αν οι γλώσσες A , B είναι κανονικές, τότε και η γλώσσα AB είναι κανονική.

Απόδειξη. Έστω το αυτόματο M_A που αναγνωρίζει την A και M_B το αυτόματο που αναγνωρίζει την B .

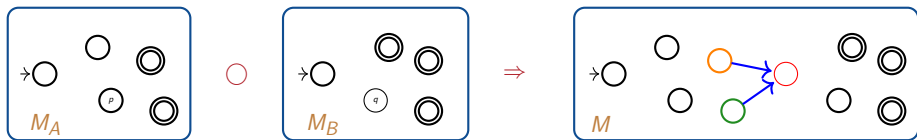
$$M_A = (K_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A), \quad M_B = (K_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$$

- 1 Κατασκευάζουμε αυτόματα M το οποίο να αναγνωρίζει την AB .
- 2 Το M πρέπει να αναγνωρίζει είσοδο w , όπου $w = xy$ με M_A να αναγνωρίζει το x και το M_B να αναγνωρίζει το y .

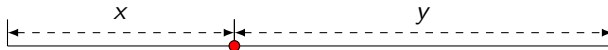


Κλειστότητα για Κανονικές Εκφράσεις

Απόδειξη (συνέχεια). Το M πρέπει να αναγνωρίζει είσοδο w , όπου $w = xy$ με M_A να αναγνωρίζει το x και το M_B να αναγνωρίζει το y .



Δηλαδή, θα πρέπει το w να χωρίζεται

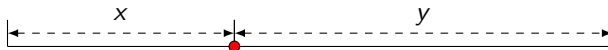


Επομένως, πως θα πρέπει να χωρίσουμε το w ;

Γιατί ο ντετερμινισμός αποτυγχάνει στην κλειστότητα $\bigcirc$;

■ Η κλειστότητα ως προς την $\bigcirc$ σημαίνει: συμβολοσειρές που χωρίζονται σε δύο τμήματα, το πρώτο στο A και το δεύτερο στο B .

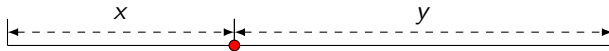
■ Ένα DFA δεν μπορεί να ‘μαντέψει’ πού τελειώνει το τμήμα του A ώστε να ξεκινήσει ο έλεγχος για το B .



Γιατί ο ντετερμινισμός αποτυγχάνει στην κλειστότητα $\bigcirc$;

■ Η κλειστότητα ως προς την $\bigcirc$ σημαίνει: συμβολοσειρές που χωρίζονται σε δύο τμήματα, το πρώτο στο A και το δεύτερο στο B .

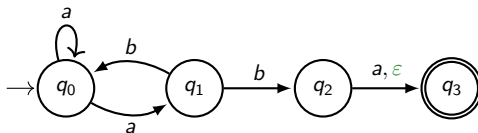
■ Ένα DFA δεν μπορεί να ‘μαντέψει’ πού τελειώνει το τμήμα του A ώστε να ξεκινήσει ο έλεγχος για το B .



■ Για να το πετύχουμε, χρειαζόμαστε μη-ντετερμινιστική μετάβαση: από κάθε αποδεκτή κατάσταση του A να ‘ξεκινάμε’ παράλληλα το B .

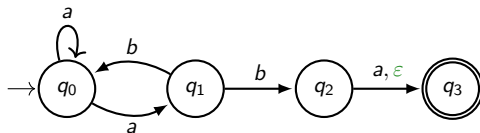
■ Επομένως η το υπολογιστικό σύστημα χρειάζεται μια μη-ντετερμινιστική επέκταση/παραλλαγή.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα



- Ντετερμινιστικός υπολογισμός, **μονοπάτι**.
- Μη-ντετερμινιστικός υπολογισμός, **δέντρο**.
- Οι ντετερμινιστικές μηχανές είναι ειδική περίπτωση μη-ντετερμινιστικών μηχανών.
- Δεν πρόκειται για ρεαλιστικό μοντέλο υπολογισμού, έχει όμως αρκετά προτερήματα.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα



Μεταβάσεις:

■ $(q_0, a) \rightarrow \{q_0, q_1\}$

■ $(q_1, b) \rightarrow \{q_0, q_2\}$

■ $(q_2, b) \rightarrow \{\}$

■ $(q_2, a) \rightarrow \{q_2, q_3\}$

■ $(q_3, a) \rightarrow \{\}$

■ $(q_3, b) \rightarrow \{\}$

■ το $\{\}$ γράφεται και ως $\emptyset$ ή null.

■ Έστω η συμβολοσειρά ab , το NFA **ταυτόχρονα** θα τρέξει

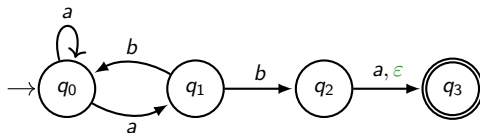
✗ $q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} \{\}$

✗ $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0$

✓ $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{\varepsilon} q_3$

■ Άρα η ab θα γίνει αποδεκτή.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα



Μεταβάσεις:

- $(q_0, a) \rightarrow \{q_0, q_1\}$
- $(q_1, b) \rightarrow \{q_0, q_2\}$
- $(q_2, \varepsilon) \rightarrow \{q_2, q_3\}$

- Συνεπώς, δεν έχουμε συνάρτηση μετάβασης από μια κατάσταση προς μια κατάσταση, αλλά συνάρτηση μετάβασης από μια κατάσταση σε **πολλές** καταστάσεις

$$K \rightarrow 2^K$$

- Σε ορισμένα συγγράμματα, αυτό αναφέρεται ως **σχέση**.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

Ορισμός. Ένα μη-ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (NFA) είναι μια πεντάδα όπου

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

K , πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων,

Σ , πεπερασμένο αλφάβητο,

δ , συνάρτηση μετάβασης, $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^K$, $[\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}]$

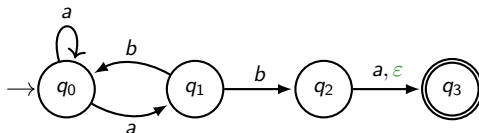
[Αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια της σχέσης μετάβασης τότε θα χρειαστεί να αλλάξουμε την δ σε $\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$]

s , αρχική κατάσταση,

F , σύνολο τελικών καταστάσεων.

Μη-ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ.



$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$$

$$\Sigma = \{a, b\},$$

$$s = q_0,$$

$$F = \{q_3\}.$$

■ Τι δίνει η M με είσοδο aab ;

συνάρτηση δ
$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$
$\delta(q_1, b) = \{q_0\}$
$\delta(q_1, b) = \{q_0, q_2\}$
$\delta(q_2, a) = \{q_3\}$
$\delta(q_2, \varepsilon) = \{q_3\}$

Σχέση Δ
(q_0, a, q_0)
(q_0, a, q_1)
(q_1, b, q_0)
(q_1, b, q_2)
(q_2, a, q_3)
(q_2, ε, q_3)