



ΗΥ - 280 Θεωρία Υπολογισμού

Διάλεξη 1

Κωνσταντίνος Βάρσος

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών – Πανεπιστήμιο Κρήτης

Χειμερινό εξάμηνο 2025 - 26

Υλικό - Βιβλιογραφία

- Sipser M., Introduction to Theory of Computation, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Lewis H. και Παπαδημητρίου Χ., Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού, Εκδόσεις Κριτική.
- Ασκήσεις φροντιστηρίων.
- Σημειώσεις, ανακοινώσεις, ασκήσεις, παραδείγματα και πρόσθετο υλικό: elearn, <https://www.csd.uoc.gr/~hy280/>.

Διαδικαστικά

- Διδάσκων: Κωνσταντίνος Βάρσος, γραφείο Η-301.
- Βοηθοί:
 - Αναγνωστάκης Κωνσταντίνος,
 - Βίλλια Μαρία-Μυρτώ,
 - Κομοριτσάν Εντίσα Τζεορτζιάνα,
 - Ξανθάκης Γεώργιος,
 - Παπαμιχαήλ Μερκούριος
- Εγγραφή στην λίστα του μαθήματος:
<http://www.csd.uoc.gr/services/useful-info/subscription.html>
- Ώρες γραφείου: Μια ώρα μετά από κάθε διάλεξη για κατ' ιδίαν συνάντηση. Προτείνεται η αποστολή e-mail, και ο καθορισμός μιας συνάντησης.
- Φυσικά, e-mail στον διδάσκοντα και στους βοηθούς του μαθήματος. Προσπαθείστε οι απορίες σας είναι όσο το δυνατόν πιο στοχευμένες.

Διαδικαστικά

- 4 ώρες θεωρία (Δευτέρα, Τρίτη) και 2 ώρες ασκήσεων (Παρασκευή)
- (ΦΑ) 3 υποχρεωτικά φυλλάδια ασκήσεων + 1 προαιρετικό (στο τέλος του εξαμήνου)
- (Π) Προαιρετική πρόοδος, ~ μέσα Νοεμβρίου
- (ΤΕ) Τελική εξέταση
- Βαθμός: $0.5 \times \text{ΤΕ} + 0.3 \times \max\{\text{ΤΕ}, \text{Π}\} + 0.2 \times \text{ΦΑ}$.
- Θα ενημερώνεστε από την σελίδα του μαθήματος για αλλαγές στο πρόγραμμα, ανακοινώσεις ασκήσεων και βαθμών κτλ.

Εισαγωγή

Εισαγωγικά

■ Ο σκοπός του ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού είναι μια εισαγωγή στην Θεωρία Υπολογισιμότητας και στην Θεωρία Πολυπλοκότητας.

■ Πληρότητα και αυτοματοποίηση των μαθηματικών [D. Hilbert, 1900].

! Μη-πληρότητα [K. Gödel, 1931]. Μη-αυτοματοποίηση [A. Turing, 1930s].

■ Μοντέλο υπολογιστή [J. von Neumann, 1940s].



David Hilbert



Kurt Gödel



Alan Turing



John von Neumann

Εισαγωγικά

■ Το κίνητρο είναι

ότι υπάρχουν προβλήματα που είναι δύσκολο ή αδύνατο να λυθούν από υπολογιστές.
να βρούμε τις υπολογιστικές δυνατότητες/περιορισμούς των υπολογιστών.

■ Ο σκοπός είναι

- Κατανόηση των δυνατοτήτων των υπολογιστών.
- Αποδοτικοί αλγόριθμοι.
- Αναγνώριση δυσεπίλυτων προβλημάτων.
- Μελέτη μοντέλων προς τον υπολογισμό πραγματικών καταστάσεων.
- Ανάπτυξη θεωρητικών εργαλείων για την ενίσχυση της έρευνας στην πληροφορική, την μηχανική και τα μαθηματικά.

Εισαγωγικά

Σύνοψη

- Στο ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού τα κύρια αντικείμενα μελέτης είναι
 - Τι σημαίνει υπολογισμός;
π.χ., πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, puzzle, κτλ.

Εισαγωγικά

Σύνοψη

- Στο ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού τα κύρια αντικείμενα μελέτης είναι
 - Τι σημαίνει υπολογισμός;
π.χ., πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, puzzle, κτλ.
 - Πως μπορούμε να κάνουμε/περιγράψουμε υπολογισμούς; [Γλώσσες-Αυτόματα]
Πεπερασμένα αυτόματα, Μηχανές Turing, κτλ.

Εισαγωγικά

Σύνοψη

- Στο ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού τα κύρια αντικείμενα μελέτης είναι
 - Τι σημαίνει υπολογισμός;
π.χ., πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, puzzle, κτλ.
 - Πως μπορούμε να κάνουμε/περιγράψουμε υπολογισμούς; [Γλώσσες-Αυτόματα]
Πεπερασμένα αυτόματα, Μηχανές Turing, κτλ.
 - Τι μπορούμε να υπολογίσουμε και τι όχι; [Θεωρία Υπολογισιμότητας]
π.χ., πιστοποίηση

Εισαγωγικά

Σύνοψη

- Στο ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού τα κύρια αντικείμενα μελέτης είναι
 - Τι σημαίνει υπολογισμός;
π.χ., πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, puzzle, κτλ.
 - Πως μπορούμε να κάνουμε/περιγράψουμε υπολογισμούς; [Αυτόματα]
Πεπερασμένα αυτόματα, Μηχανές Turing, κτλ.
 - Τι μπορούμε να υπολογίσουμε και τι όχι; [Θεωρία Υπολογισιμότητας]
π.χ., πιστοποίηση
 - Πόσο αποδοτικά μπορούμε να υπολογίσουμε; [Θεωρία Πολυπλοκότητας]
π.χ., παραγοντοποίηση
- Θα χρειαστείτε κάποια εξοικώωση με κάποιες μαθηματικές έννοιες, θεωρήματα και αποδείξεις.

Εισαγωγικά

Αυτόματα

- Στοιχειώδης υπολογιστική μηχανή.
- Μελέτη μαθηματικών ιδιοτήτων μοντέλων υπολογισμού.
- Χρήσιμα στην Πληροφορική [compilers, hardware, γλώσσες προγραμματισμού, κτλ]

Θεωρία Υπολογισιμότητας

- Μελετά ποια προβλήματα μπορούν να λυθούν από υπολογιστή και ποια όχι.
- Τι μπορούμε να κάνουμε με έναν υπολογιστή.
- Κατηγοριοποιούμε τα προβλήματα σε *επιλύσιμα* και *μη-επιλύσιμα*.

Θεωρία Πολυπλοκότητας

- Αρκετά κοντά στην Θεωρία Υπολογισιμότητας.
- Κατηγοριοποιούμε τα προβλήματα σε *εύκολα* και *δύσκολα*.

Εισαγωγικά

Αλγόριθμος, είναι λεπτομερής περιγραφή μεθόδου επίλυσης ενός προβλήματος.
Υπολογιστική μηχανή ειδικού σκοπού.

Υπολογιστικό πρόβλημα, αποτελείται από ένα άπειρο σύνολο στιγμιοτύπων. [**Αντικείμενο του μαθήματος**].

Στιγμιότυπο, είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο για το οποίο κάνουμε **ερώτηση** και αναμένουμε **απάντηση**.

Δύο είδη προβλημάτων:

Απόφασης, απαντήσεις **ΝΑΙ** ή **ΟΧΙ**.

Βελτιστοποίησης, καλύτερη εφικτή **λύση**.

Εισαγωγικά - Προβλήματα

■ Πρόβλημα Προσπέλασης,

Στιγμιότυπο, κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με διακεκριμένες $s, t \in V$.

Ερώτηση, υπάρχει μονοπάτι από το s στο t ;

■ Πρόβλημα Συντομότερου Μονοπατιού,

Στιγμιότυπο, κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές.

Ερώτηση, ποιό είναι το συντομότερο μονοπάτι από το s στο t ;

■ Πρόβλημα κύκλου Hamilton,

Στιγμιότυπο, γράφημα $G(V, E, w)$.

Ερώτηση, υπάρχει κύκλος Hamilton στο G ;

■ Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή, Πρόβλημα Διαμέρισης Συνόλου, κτλ

Εισαγωγικά - Σύνολα

Σύνολα και πράξεις συνόλων (συμπλήρωμα, ένωση $\cup$, τομή $\cap$, διαφορά $\setminus \dots$)

- $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$

Δυναμοσύνολο συνόλου A : Σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του A , $\mathcal{P}(A)$ (ή 2^A εναλλακτικά).

π.χ., $A = \{a, b\}$ τότε $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Διαμέριση συνόλου A : Μη-κενά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του A , με ένωση A ,

π.χ., $A_1, A_2 \neq \emptyset, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1, A_2 \subset A, \quad A_1 \cup A_2 = A.$

Εισαγωγικά - Σύνολα

Σε κάποιες των περιπτώσεων οι πράξεις μεταξύ των συνόλων θα ορίζονται κατά την διαδικασία εκφώνησης θεωρήματος, απόδειξης, άσκησης, κτλ.

π.χ., Έστω $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ τότε ορίζουμε την πράξη

$$A \times B = \{(i, j) \mid \forall i \in A, j \in B\}, \quad (\text{Καρτεσιανό γινόμενο})$$

δηλαδή, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$.

Παρομοίως μπορούμε να ορίσουμε, $A \times B \times A$, A^k , κτλ

Εισαγωγικά - Συναρτήσεις

Συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ (στοιχεία έχουν μοναδική εικόνα)

■ Ένα προς ένα (ή 1 – 1): $\forall x, x' \in A$ με $x \neq x'$, $f(x) \neq f(x')$.

■ Επί: $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$.

■ Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση: Ένα προς ένα και επί.

■ Αντίστροφη συνάρτηση: $f^{-1} : B \rightarrow A$.

■ Οι συναρτήσεις ανώτερης τάξης διαστάσεων **π.χ.**, $f : A_1 \times \dots \times A_k \rightarrow B_1 \times \dots \times B_m$.

■ Μια **ιδιότητα** είναι μια (ειδικού) τύπου συνάρτηση που έχει εικόνα είτε τιμή **Αληθής** είτε τιμή **Ψευδής**. **π.χ.**, $\text{άρτιος}(2) = \text{Αληθής}$, $\text{αρνητικός}(3) = \text{Ψευδής}$.

■ Μια ιδιότητα με πεδίο ορισμού από το σύνολο $\overbrace{A \times \dots \times A}^k$ λέγεται **k-σχέση**.

Εισαγωγικά - Ιδιότητες Διμελών Σχέσεων

■ $R \subset A \times A$ (μπορεί να αναπαρασταθεί ως γράφημα $G = (V, E)$ με $V = A$).

Ανακλαστική, $\forall a \in A, (a, a) \in R$.

Συμμετρική, $(a, b) \in R$ τότε $(b, a) \in R$.

Αντισυμμετρική, $(a, b) \in R$ και $a \neq b$ τότε $(b, a) \notin R$.

Μεταβατική, $(a, b) \in R$ και $(b, c) \in R$ τότε $(a, c) \in R$.

Σχέση Ισοδυναμίας: Ανακλαστική, Συμμετρική, Μεταβατική.

Σχέση Μερικής Διάταξης: Ανακλαστική, Αντισυμμετρική, Μεταβατική.

Σχέση Ολικής Διάταξης: Μερική Διάταξη και $\forall a, b \in A, (a, b) \in R$ ή $(b, a) \in R$.

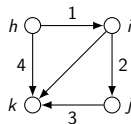
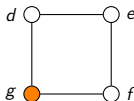
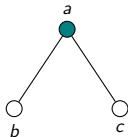
Εισαγωγικά - Γράφοι

Ένας γράφος G είναι μια συλλογή σημείων (κορυφών), και γραμμών (ακμών) που ενώνουν αυτά τα σημεία.

Ένας γράφος G μπορεί να είναι μη-κατευθυνόμενος, κατευθυνόμενος, βεβαρημένος, συνεκτικός, κτλ.

Σημαντικές έννοιες: βαθμός κορυφής, υπογράφος, (απλό) μονοπάτι, (απλός) κύκλος, (παραγόμενο) δέντρο, κτλ. (περισσότερα στο ΗΥ-118)

π.χ.,



Τεχνικές απόδειξης

Ευθεία απόδειξη. Ξεκινάμε από μια υπόθεση, p , και καταλήγουμε σταδιακά στο συμπέρασμα, q , με συνεπαγωγή, δηλαδή $p \rightarrow \dots \rightarrow q$.

Απαγωγή σε άτοπο. Ξεκινάμε, με την υπόθεση ότι η αντίθετη δήλωση από αυτή που ζητάμε είναι αληθής.

Εάν η υπόθεση αυτή οδηγεί σε αντίφαση, τότε η υπόθεση πρέπει να είναι ψευδής.

Επομένως η δήλωση που θέλουμε να αποδείξουμε πρέπει να είναι αληθής!

π.χ. Δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x, y τέτοιοι ώστε $18x + 6y = 1$.

Έστω ότι υπάρχουν. Διαιρούμε την εξίσωση με 6 και παίρνουμε $3x + y = 1/6$.

Καταλήξαμε σε **άτοπο**, καθώς ο αριθμός $3x + y$ είναι ακέραιος, ενώ ο $1/6$ όχι. Συνεπώς, δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε $18x + 6y = 1$. $\square$

Τεχνικές απόδειξης

Μαθηματική επαγωγή

Αρχικό βήμα, το ζητούμενο ισχύει για συγκεκριμένο βήμα.

Επαγωγική υπόθεση (διαισθητικά επαγωγική συνεπαγωγή)

$$\text{'Ισχύει' για } k \rightarrow \text{'Ισχύει' για } k + 1$$

Υποθέτουμε ότι το προηγούμενο βήμα είναι αληθές και στην συνέχεια προχωράμε στην απόδειξη της συνεπαγωγής, δηλαδή του επόμενου βήματος.

Στην πραγματικότητα δεν αποδεικνύουμε ότι ισχύει για κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, αλλά μόνο ότι εάν ισχύει για έναν συγκεκριμένο αριθμό k , τότε ισχύει για τον επόμενο αριθμό $k + 1$.

Συνδυάζοντας το αρχικό βήμα με την επαγωγική υπόθεση αποδεικνύουμε ότι το ζητούμενο είναι αληθές!

Τεχνικές απόδειξης

Μαθηματική επαγωγή

π.χ. $\forall n \geq 1$ ισχύει

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Αρχικό βήμα, για $n = 1$ παίρνουμε $1 = 1$, άρα ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση, έστω ότι ισχύει για $n = k$. Θ.δ.ο. ισχύει για $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Τεχνικές απόδειξης

Αρχή Περιστερών. Αν A και B είναι πεπερασμένα σύνολα και $|A| > |B|$, τότε δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση από το A στο B ($f : A \rightarrow B$).

π.χ., Αν 10 αντικείμενα πρέπει να αποθηκευθούν σε 9 κουτιά, τότε θα υπάρχει το λιγότερο ένα κουτί με περισσότερα των ένα αντικείμενα.

Διαγωνιοποίηση. Τεχνική που αποδεικνύει ότι κάποιο x δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου Y , κατασκευάζοντας το x ώστε να μην είναι ίσο με κανένα στοιχείο του Y .

Προτάθηκε από τον Georg Cantor (1845-1918).

π.χ., Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

Γλώσσες - Αυτόματα

Κωδικοποίηση

■ **Κωδικοποίηση προβλημάτων:** η συστηματική μέθοδος μετασχηματισμού ενός μαθηματικού αντικειμένου ή ενός σύνθετου προβλήματος σε μια απλούστερη, δομημένη μορφή, συχνά μια συμβολοσειρά, που μπορεί να υποβληθεί σε επεξεργασία από έναν υπολογιστή ή ένα επίσημο μοντέλο υπολογισμού.

Γλώσσες - Βασικές έννοιες

Αλφάβητο. Κάθε πεπερασμένο μη-κενό σύνολο, τα μέλη του ονομάζονται σύμβολα.

π.χ., $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$, κτλ

Συμβολοσειρά (string) πάνω σε αλφάβητο Σ , είναι μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων στο Σ .

Υποσυμβολοσειρά (substring) z συμβολοσειράς w , αν z εμφανίζεται ενιαίο στην w .

Μήκος συμβολοσειράς w , $|w|$ είναι το πλήθος των συμβόλων από τα οποία αποτελείται.

π.χ., $w = aaabba$, $|w| = 6$.

■ Η κενή συμβολοσειρά ε είναι μια συμβολοσειρά μήκους 0, $|\varepsilon| = 0$.

■ Λεξικογραφική διάταξη (lexicographic ordering), η σειρά των δύο συμβολοσειρών εξαρτάται από την αλφαβητική σειρά των συμβόλων. π.χ., αλφάβητο $\{0, 1\}$, λεξικογραφική διάταξη $\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$.

Γλώσσες - Βασικές έννοιες

■ Σ^k , το σύνολο όλων των συμβολοσειρών του Σ μήκους k .

π.χ., $\{0,1\}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

■ Σ^* , το σύνολο όλων των συμβολοσειρών του Σ .

π.χ., $\{0,1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, \dots\}$.

Παράθεση, $w, u, w \circ u (wu)$. π.χ., $w = 3344, u = abab, wu = 3344abab$.

Επανάληψη, w, k φορές, $w^k = \overbrace{w \times \dots \times w}^k$. π.χ., $w = 3344, k = 3, w^3 = 334433443344$.

Αντιστροφή, w^R της w . π.χ., $w = 3344, w^R = 4433$.

Γλώσσες - Βασικές έννοιες

Γλώσσα είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του Σ^* , δεδομένου του αλφαβήτου Σ . [Δηλαδή, μια γλώσσα είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο συμβολοσειρών.]

π.χ., $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$, $A = \{1, 00, 101\}$, $B = \{\}$, $C = \{\varepsilon\}$, ...

π.χ., Μερικές γλώσσες στο $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$,

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ διαιρείται με το } 5\}$$

$$A = \{ \}$$

$$\Psi = \{\varepsilon\}$$

$$\Phi = \{\varepsilon, 9, 99, 999, \dots\}$$

■ Η κενή γλώσσα είναι ένα σύνολο χωρίς συμβολοσειρές.

Κωδικοποίηση

Πρόβλημα **απόφασης**, τυπική **γλώσσα** με κωδικοποίηση **απόφασης** με φράγμα B .

Στιγμιότυπο, συμβολοσειρά με κάποιο **αλφάβητο** Σ .

Πρόβλημα, γλώσσα υποσύνολο όλων των συμβολοσειρών του Σ^* .

Πρόβλημα **βελτιστοποίησης**, πρόβλημα **απόφασης** με φράγμα B .

Ελαχιστοποίηση, υπάρχει εφικτή λύση με κόστος $\leq B$;

Μεγιστοποίηση, υπάρχει εφικτή λύση με κέρδος $\geq B$;

Πρόβλημα Π και κωδικοποίηση e : Γλώσσα $\mathcal{L}(\Pi, e)$ αποτελείται από $x \in \Sigma^*$ που προκύπτουν από την e -κωδικοποίηση των **NAI-στιγμιοτύπων του Π** .

$$\mathcal{L}(\Pi, e) := \{e(x) \in \Sigma^* \mid x \in \Pi\}$$

Πράξεις με Γλώσσες

Έστω γλώσσες A, B

Ένωση (union), $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ ή } w \in B\}$.

Τομή (intersection), $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ και } w \in B\}$.

Διαφορά (difference), $A \setminus B = \{w \mid w \in A \text{ και } w \notin B\}$.

Παράθεση (concatenation), $A \circ B = \{wy \mid w \in A \text{ και } y \in B\} = AB$.

Kleene star, $A^* = \{w \in \Sigma^* \mid w_1 \circ \dots \circ w_n \text{ όπου } w_i \in A \text{ και } i \in [n], n \geq 0\}$. [το ε ανήκει πάντα στην A^* .]

π.χ. Έστω $A = \{0, 1\}$ και $B = \{0, a, b\}$.

$$\blacksquare A \cup B = \{0, 1, a, b\}, A \cap B = \{0\}, A \setminus B = \{1\}$$

$$\blacksquare A \circ B = \{00, 0a, 0b, 10, 1a, 1b\}$$

$$\blacksquare A^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$$

$$\blacksquare A^+ = \{w \in \Sigma^* \mid w_1 \circ \dots \circ w_n \text{ όπου } w_i \in A \text{ και } i \in [n], n \geq 1\}.$$

Γλώσσες

Θεώρημα. Το σύνολο Σ^* των συμβολοσειρών ενός αλφαβήτου Σ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Το Σ είναι πεπερασμένο.

- Κατασκευάζουμε μια ακολουθία που να περιέχει όλες τις συμβολοσειρές του Σ , σε λεξικογραφική σειρά:
 - Πρώτα εμφανίζονται οι συμβολοσειρές με το μικρότερο μήκος, ξεκινώντας από αυτή με μήκος μηδέν, [δηλαδή ϵ].
- Για την ακολουθία υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία στο σύνολο $\mathbb{N}$. $\square$

Γλώσσες

Θεώρημα. Το σύνολο των γλωσσών ενός αλφαβήτου Σ είναι μη-αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Έστω ότι το σύνολο των γλωσσών του Σ είναι αριθμήσιμο. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{S\}$ για όλες τις γλώσσες του Σ , $\{S\} = \{S_1, S_2, \dots\}$.

Θα κατασκευάσουμε γλώσσα T , τ.ω. $T \notin \{S\}$.

- Έστω $w_1, w_2, \dots$ λεξικογραφική ακολουθία των συμβολοσειρών του Σ .
- Η T διαφέρει από την S_i στην θέση του w_i .
- Η T περιέχει την w_i ανν S_i δεν περιέχει την w_i , $T = \{w_i \mid w_i \notin S_i, i \in \mathbb{N}\}$.
- Άρα η $\{S\}$ δεν περιέχει όλες τις γλώσσες του Σ , άτοπο. $\square$
- Συνεπώς, οποιαδήποτε αναπαράσταση και αν διαλέξουμε, θα υπάρχουν γλώσσες που δεν περιγράφονται!
- Υπάρχει γλώσσα ωστέ κανένα πρόγραμμα C++ δεν μπορεί να τυπώσει όλες τις συμβολοσειρές της;

Γλώσσες

- Το σύνολο Σ^* των συμβολοσειρών ενός αλφαβήτου Σ είναι αριθμήσιμο.
- Το σύνολο των γλωσσών ενός αλφαβήτου Σ είναι μη-αριθμήσιμο.
- Πόσες συμβολοσειρές έχει ένα αλφάβητο Σ ; $|\Sigma^*| = \infty \quad (\aleph_0)$.
- Πόσες γλώσσες ορίζονται στο Σ ; $|2^{\Sigma^*}| = \infty \quad (\aleph_1)$.
- Το $|2^{\Sigma^*}|$ είναι 'μεγαλύτερο' από το $|\Sigma^*|$.

Πεπερασμένη Αναπαράσταση Γλωσσών

■ Αναπαράσταση είναι συμβολοσειρά κάποιου πεπερασμένου αλφαβήτου. [μόνο για αριθμήσιμα διαφορετικές γλώσσες]

■ Όπως είδαμε, υπάρχουν μη-αριθμήσιμα διαφορετικές γλώσσες. Άρα υπάρχουν γλώσσες που δεν έχουν πεπερασμένη αναπαράσταση.

■ Εστιάζουμε στις γλώσσες που έχουν πεπερασμένη αναπαράσταση.

□ Οι αναπαραστάσεις των γλωσσών θα είναι της μορφής

$$A = \{w \mid w \text{ ικανοποιεί μια ιδιότητα } T\}$$

, για κάποιο T το οποίο έχει πεπερασμένη αναπαράσταση.

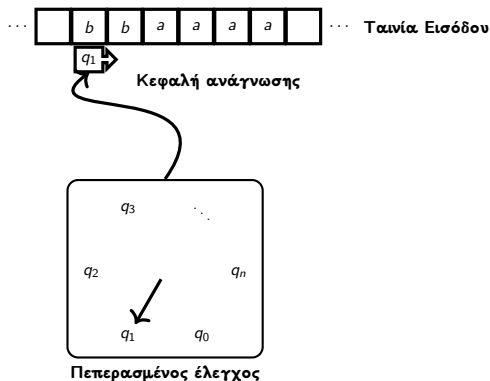
■ Θα ορίσουμε μορφές αναπαράστασης και υπολογιστές που τις αναγνωρίζουν.

Γλώσσες

■ **Αυτόματο** μιας γλώσσας. Μηχανισμός που μας επιτρέπει την **αναγνώριση** των μελών μιας γλώσσας.

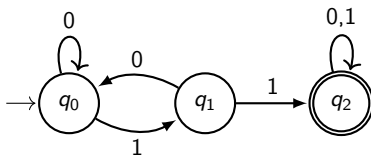
□ Αρχικά, θα μιλήσουμε για τα *αιτιοκρατικά μοντέλα*, τα οποία είναι συστήματα ή θεωρίες όπου όλα τα γεγονότα και οι καταστάσεις καθορίζονται από προηγούμενες αιτίες και νόμους της φύσης.

Πεπερασμένα αυτόματα



- πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων
- ελάχιστη μνήμη
- συμβολοσειρά στην ταινία
- είσοδος σειριακά από ταινία μέσω κεφαλής ανάγνωσης
- νέο σύμβολο εισόδου προκαλεί αλλαγή κατάστασης
- έξοδος **μόνο** αν προσπελαστεί χαρακτηριστικό εξόδου ως κατάσταση αποδοχής

Πεπερασμένα αυτόματα



- Καταστάσεις q_0, q_1, q_2
- Μεταβάσεις $\xrightarrow{0}, \xrightarrow{1}$, κτλ.
- Αρχική κατάσταση $\rightarrow$
- Τερματική κατάσταση $\odot$

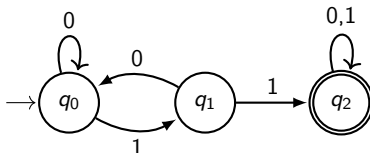
Είσοδος, συμβολοσειρά.

Έξοδος, αποδοχή ή απόρριψη.

Διαδικασία, Ξεκινάμε από την αρχική κατάσταση, διαβάζουμε σύμβολα εισόδου, μεταβαίνουμε σε άλλη κατάσταση, κτλ.

π.χ., 01101 $\rightarrow$ αποδοχή, 00101 $\rightarrow$ απόρριψη.

Πεπερασμένα αυτόματα



Το αυτόματο M δέχεται **αποκλειστικά** τις συμβολοσειρές του συνόλου A

$$A = \{w \mid w \text{ περιέχει την υπό-συμβολοσειρά } 11\}.$$

- Η A αποτελεί γλώσσα του M .
- Το M αναγνωρίζει την A .
- Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A = L(M)$.

Πεπερασμένα Αυτόματα

Ορισμός. Ένα (ντετερμινιστικό) πεπερασμένο αυτόματο (DFA) είναι μια πεντάδα όπου

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

K , πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων

Σ , πεπερασμένο αλφάβητο,

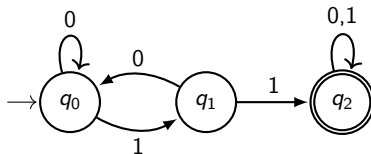
δ , συνάρτηση μετάβασης, $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$.

s , αρχική κατάσταση,

F , σύνολο τελικών καταστάσεων.

Πεπερασμένα Αυτόματα

π.χ.



Συνάρτηση μετάβασης

$$M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}.$$

$$\Sigma = \{0, 1\}.$$

$$F = \{q_2\}.$$

$\delta :$

	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2

Πεπερασμένα Αυτόματα

Ένα αυτόματο M **δέχεται** μια συμβολοσειρά $w = w_1 w_2 \dots w_n$, όπου $w_i \in \Sigma$, αν υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $p_0, p_1, \dots, p_n \in K$ τ.ω.

- $p_0 = q_0$
- $p_i = \delta(q_{i-1}, w_i), 1 \leq i \leq n$
- $p_n \in F$

, δηλαδή καταλήγει σε κάποια κατάσταση του F .