Φροντιστήριο 20/11/2026

Άσκηση 1. Θεωρούμε τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα $G = (V, \Sigma, R, S)$, με κανόνες παραγωγής

$$S \to ASA \mid aB,$$
$$A \to B \mid S,$$
$$B \to b \mid \varepsilon.$$

Να μετατρέψετε τη γραμματική G σε ισοδύναμη γραμματική σε **κανονική μορφή Chomsky (CNF)**, ακολουθώντας τα τέσσερα βήματα του Sipser:

1. Εισαγωγή νέας αρχικής μεταβλητής S_0.
2. Κατάργηση όλων των κανόνων $X \to \varepsilon$.
3. Κατάργηση όλων των μοναδιαίων κανόνων $X \to Y$, όπου X, Y είναι μεταβλητές.
4. Μετατροπή των υπόλοιπων κανόνων στην επιτρεπτή μορφή της CNF.

Να γράψετε ρητά τη γραμματική που προκύπτει **μετά από κάθε βήμα** και να εξηγήσετε συνοπτικά γιατί διατηρείται η παραγόμενη γλώσσα.

Άσκηση 2. Έστω L μια γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (context-free language). Αποδείξτε ότι η αντίστροφη γλώσσα

$$L^R = \{w^R \mid w \in L\}$$

είναι επίσης γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Υπόδειξη: Πώς μπορούμε να αντιστρέψουμε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα;

Άσκηση 3. Να κατασκευάσετε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα (CFG) που παράγουν καθεμία από τις παρακάτω γλώσσες.

Για συμβολοσειρές x, w, συμβολίζουμε με $\#(x, w)$ το πλήθος εμφανίσεων της υποσυμβολοσειράς x μέσα στη w, συμπεριλαμβανομένων τυχόν επικαλυπτόμενων εμφανίσεων.

Για παράδειγμα,

$$\#(0, 101001) = 3, \qquad \#(010, 1010100011) = 2.$$

Τα ερωτήματα δεν παρουσιάζονται κατά αύξουσα σειρά δυσκολίας.

(a) Όλες οι συμβολοσειρές του $\{0,1\}^*$ των οποίων το μήκος είναι πολλαπλάσιο του 5.

(b) Όλες οι συμβολοσειρές του $\{0,1\}^*$ που αναπαριστούν μη αρνητικά πολλαπλάσια του 5 στο δυαδικό σύστημα. Είναι κανονική η γλώσσα; Ποιες οι κλάσεις Myhill-Nerode της γλώσσας;

(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \#(0, w) = 2 \cdot \#(1, w)\}$.

(d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \#(0, w) \neq 2 \cdot \#(1, w)\}$.

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \#(00, w) = \#(11, w)\}$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε την ακόλουθη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα $G = (V, \Sigma, R, S)$, η οποία βρίσκεται ήδη σε κανονική μορφή Chomsky (CNF):

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid BC, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to CC \mid b, \\ C &\to AB \mid a. \end{aligned}$$

Θέλουμε να εξετάσουμε αν η λέξη

$$w = baaba$$

ανήκει στη γλώσσα $L(G)$.

1. Να ορίσετε το σύνολο $T[i, j]$ που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος CYK.
2. Να υπολογίσετε όλα τα σύνολα $T[i, j]$ για $1 \leq i \leq j \leq 5$, συμπληρώνοντας τον τριγωνικό πίνακα του αλγορίθμου.
3. Να εξηγήσετε αναλυτικά τον υπολογισμό των συνόλων $T[3, 4]$, $T[3, 5]$ και $T[1, 5]$.
4. Να αποφασίσετε αν $w \in L(G)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
5. Αν η λέξη ανήκει στη γλώσσα, να δώσετε μία παραγωγή της από την αρχική μεταβλητή S.