Φροντιστήριο 30/10/2026

Άσκηση 1. Θέματα προόδου και απορίες φοιτητών

Λύση

Λύσεις στον πίνακα.

Άσκηση 2. Επανάληψη υλικού από την διάλεξη, πρόβλημα διαφάνειας 41 Δοθέντος ενός DFA M, μπορούμε να αποφασίσουμε:

1. Αν η γλώσσα του είναι κενή:
$$L(M) = \varnothing \ ?$$
2. Αν η γλώσσα του είναι άπειρη:
$$|L(M)| = \infty \ ?$$
3. Αν δύο DFA αναγνωρίζουν την ίδια γλώσσα:
$$L(M_1) = L(M_2) \ ?$$

Λύση

Λύσεις στις διαφάνειες.

Άσκηση 3 (Εφαρμογή Pumping Lemma, περισσότερα την Τρίτη 3/11 στη διάλεξη)**.** Έστω η γλώσσα

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j, \ i, j \geq 0\}.$$

Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης (Pumping Lemma), ότι η γλώσσα L δεν είναι κανονική.

Λύση

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι η γλώσσα L είναι κανονική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα Άντλησης, υπάρχει ακέραιος $p \geq 1$ τέτοιος ώστε κάθε λέξη $w \in L$ με $|w| \geq p$ να μπορεί να γραφεί ως $w = xyz$, όπου:
(i) $|xy| \leq p$,
(ii) $|y| > 0$,
(iii) $xy^k z \in L$ για κάθε $k \geq 0$.
Επιλέγουμε τη λέξη
$$w = 0^{p+1} 1^p.$$
Προφανώς $w \in L$, αφού $p + 1 > p$, και $|w| = 2p + 1 \geq p$.
Εξετάζουμε οποιαδήποτε διάσπαση $w = xyz$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii). Επειδή τα πρώτα p σύμβολα της w είναι μηδενικά και $|xy| \leq p$, η υπολέξη y αποτελείται αποκλειστικά από μηδενικά. Επομένως,
$$y = 0^t, \qquad 1 \leq t \leq p.$$

Επιλέγουμε $k = 0$, δηλαδή αφαιρούμε την υπολέξη y. Η νέα λέξη είναι

$$xy^0z = xz = 0^{p+1-t}1^p.$$

Το πλήθος των μηδενικών είναι $i = p + 1 - t$ και το πλήθος των άσων είναι $j = p$. Επειδή $t \geq 1$, ισχύει

$$i = p + 1 - t \leq p = j,$$

οπότε δεν ισχύει $i > j$, και άρα $xz \notin L$.
Αυτό αντιφάσκει με την (iii), η οποία απαιτεί $xy^kz \in L$ για κάθε $k \geq 0$, και ειδικά για $k = 0$. Συνεπώς, η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη και καταλήγουμε ότι

$$\boxed{L \text{ δεν είναι κανονική.}}$$

Παρατήρηση 1. Η επιλογή $k = 0$ είναι ουσιαστική. Για $k \geq 2$ (άντληση προς τα πάνω) προστίθενται μόνο μηδενικά, άρα η λέξη $xy^kz = 0^{p+1+(k-1)t}1^p$ παραμένει στην L και δεν προκύπτει άτοπο.

Παρατήρηση 2. Πώς επιλέξαμε την w; Ο στόχος είναι να επιλέξουμε μια λέξη που βρίσκεται ακριβώς στο όριο της L, ώστε οποιαδήποτε άντληση που την αγγίζει να τη βγάζει εκτός γλώσσας. Αυτή είναι όλη η ιδέα.
Η L απαιτεί αυστηρά περισσότερα 0 από 1. Μια λέξη όπως η $0^{2p}1^p$ βρίσκεται "βαθιά" μέσα στην L: μπορείς να αφαιρέσεις αρκετά μηδενικά και να έχεις ακόμη περισσότερα 0 από 1, άρα η άντληση προς τα κάτω δεν χαλάει τίποτα. Η πιο "σφιχτή" λέξη της L έχει ακριβώς ένα επιπλέον μηδενικό, δηλαδή η $0^{p+1}1^p$, με πλεόνασμα μόνο 1. Έτσι, κάθε αφαίρεση μηδενικών κάνει το πλεόνασμα μηδέν ή αρνητικό και η λέξη βγαίνει από την L.