
HY 280 — Θεωρία Υπολογισμού

Φροντιστήριο 16/10 — Κανονικές Γλώσσες, Κανονικές εκφράσεις

Άσκηση 1 (Κανονικές εκφράσεις και ε -NFA). Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$.

(α') Να αποδείξετε τυπικά ότι

$$L((0 + 1)^*) = \Sigma^*.$$

(β') Είναι αληθές ότι

$$L(0^*1^*) = \Sigma^*;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ') Να αποδείξετε ότι

$$L((0^*1^*)^*) = \Sigma^*.$$

(δ') Κατασκευάστε ένα ε -NFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα $L((0 + 1)^*)$.

Να δώσετε τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου και να εξηγήσετε γιατί αναγνωρίζει τη ζητούμενη γλώσσα.

Άσκηση 2 (Κανονικές εκφράσεις και απαγορευμένες υποσυμβολοσειρές, διαφάνειες 31-33 από τα slides 7/10 και 12/10). Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$.

Θεωρούμε τις γλώσσες

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{η } w \text{ περιέχει το } 0000\},$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{η } w \text{ δεν περιέχει το } 0000\}.$$

(α') Να βρείτε μία κανονική έκφραση R_1 που περιγράφει τη γλώσσα L_1 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας αποδεικνύοντας ότι

$$L(R_1) = L_1.$$

(β') Θεωρούμε τη γλώσσα L_2 .

Είναι σωστή η κανονική έκφραση

$$R' = (1 + 01 + 001 + 0001)^*;$$

Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα και εξηγήστε ποιο είναι το πρόβλημα.

(γ') Να κατασκευάσετε μία κανονική έκφραση R_2 που περιγράφει τη γλώσσα L_2 .

Υπόδειξη: Χωρίστε μία λέξη σε ομάδες μηδενικών που διαχωρίζονται από άσους. Πόσα μηδενικά μπορεί να περιέχει κάθε ομάδα;

(δ') Να αποδείξετε τυπικά ότι

$$L(R_2) = L_2,$$

δείχνοντας τις δύο εγκλείσεις.

Άσκηση 3 (Δυαδικές αναπαραστάσεις δυνάμεων του 4). Να βρείτε μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα των δυαδικών αναπαραστάσεων των αριθμών 4^n , $n \geq 0$, χωρίς αρχικά μηδενικά.

Άσκηση 4 (Υποσυμβολοσειρά 001). Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$. Να βρείτε μια κανονική έκφραση για το σύνολο των δυαδικών συμβολοσειρών που περιέχουν τουλάχιστον μία εμφάνιση της υποσυμβολοσειράς 001.

Άσκηση 5 (Ισοδυναμία κανονικών εκφράσεων). Να αποδείξετε ότι

$$(0^2 + 0^3)^* = (0^2 0^*)^*.$$

Άσκηση 6 (Περιγραφή γλωσσών). Για κάθε μία από τις παρακάτω κανονικές εκφράσεις πάνω στο $\Sigma = \{0, 1\}$, περιγράψτε με λόγια τη γλώσσα που ορίζει. Εδώ το εκθετικό $+$ συμβολίζει τη θετική κλειστότητα.

(α') $(0^* 1^*)^* 0$.

(β') $(01^*)^* 0$.

(γ') $(00 + 11 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10))^*$.

(δ') $0^* + (0^* 1 + 0^* 11)(0^+ 1 + 0^+ 11)^* 0^*$.

Άσκηση 7 (Απλοποίηση κανονικών εκφράσεων). Απλοποιήστε τις ακόλουθες κανονικές εκφράσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(α') $(00)^* 0 + (00)^*$.

(β') $(0 + 1)(\varepsilon + 00)^+ + (0 + 1)$.

(γ') $(0 + \varepsilon)0^* 1$.

Άσκηση 8 (Κατασκευή κανονικών εκφράσεων). Για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες πάνω στο $\Sigma = \{0, 1\}$, κατασκευάστε μία κανονική έκφραση.

(α') Όλες οι συμβολοσειρές των οποίων το πέμπτο σύμβολο από τα δεξιά είναι 0.

(β') Όλες οι συμβολοσειρές που περιέχουν το 000 ή το 111 ως υποσυμβολοσειρά.

(γ') Όλες οι συμβολοσειρές που δεν περιέχουν ούτε το 000 ούτε το 111 ως υποσυμβολοσειρά.