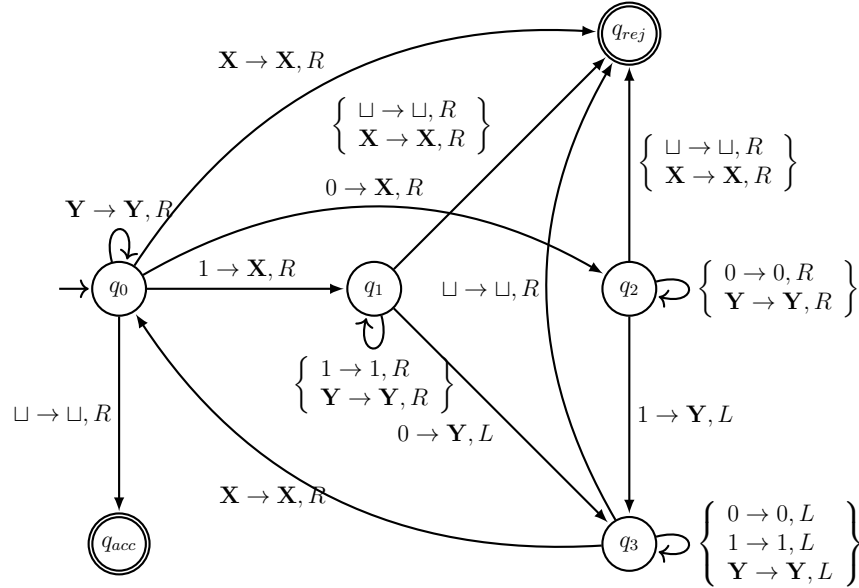


Άσκηση 1. [10 βαθμοί] Δίνεται η παρακάτω μηχανή Turing M ,



Υπολογίστε τις συμβολοσειρές $w = 0011$ και $u = 0010$. Μπορείτε να βγάλετε κάποιο συμπέρασμα για την γλώσσα που αναγνωρίζει η M ;

Άσκηση 2. [10 βαθμοί] Κατασκευάστε μηχανές Turing με αλφάβητο εισόδου $\Sigma = \{0, 1\}$ οι οποίες να υπολογίζουν τις συναρτήσεις

1. $f(w) = 111$.
2. $g(w) = \begin{cases} 0, & \text{αν } |w| \text{ άρτιο,} \\ 1, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Για την συμβολοσειρά w έχουμε ότι $w \in \Sigma^*$.

Άσκηση 3. [30 βαθμοί] Δίνονται οι παρακάτω γλώσσες,

1. $L_1 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ TM και } |L(M)| \geq 3 \}$.
2. $L_2 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ TM και } |L(M)| \leq 3 \}$.
3. $L_3 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ TM και αποδέχεται τουλάχιστον δύο διαφορετικές συμβολοσειρές} \}$.
4. $L_4 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ TM και η } M \text{ είναι η μοναδική TM και αναγνωρίζει την } L(M) \}$.

Αποδείξτε ποια ή ποιες από αυτές είναι διαγνώσιμες, μη-διαγνώσιμες, ή μη-αναγνωρίσιμες.

Άσκηση 4. [20 βαθμοί] Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Rice αποδείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες

$$1. L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM } \tau.\omega. 01 \in L(M)\}.$$

$$2. L_2 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM}, \exists w \tau.\omega. |w| \equiv 1(\text{mod } 5) \text{ και } w \in L(M)\},$$

είναι μη-διαγνώσιμες.

Άσκηση 5. [10 βαθμοί] Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Αναδρομής αποδείξτε ότι η γλώσσα

$$L_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ TM } \tau.\omega. 01 \in L(M)\},$$

είναι μη-διαγνώσιμη.

Άσκηση 6. [10 βαθμοί] Δίνονται οι γλώσσες

$$A_{DFA} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ DFA και αποδέχεται την } w\},$$

$$A_{CFG} = \{\langle G, w \rangle \mid M \text{ CFG και αποδέχεται την } w\}.$$

Αποδείξτε ότι $A_{CFG} \leq_m A_{DFA}$.

Άσκηση 7. [10 βαθμοί] Να δείξετε ότι μια γλώσσα A είναι αναγνωρίσιμη αν $A \leq_m A_{TM}$.

Άσκηση 8. [bonus] Να αποδείξετε ότι η σχέση $\leq_m$ είναι μεταβατική αλλ'όχι σχέση μερική διάταξης.

Άσκηση 9. [bonus] Διαβάστε το *Post Correspondence Problem*, Ενότητα 5.2 από το βιβλίο του M.Sipser. Έπειτα, να αποδείξετε ότι το *Post Correspondence Problem* είναι μη-διαγνώσιμο για αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$.