

Άσκηση 1. [20 βαθμοί] Κατασκευάστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις γλώσσες

1. $L_1 = \{0^n 1^m 2^{m+n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$
2. $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \text{ περιττό, } 1 \text{ στη μεσοαία θέση}\}.$
3. $L_3 = \{0^n 1^m \mid 2n = 3m + 1, n, m \in \mathbb{N}\}.$
4. $L_4 = \overline{L_3}.$

Άσκηση 2. [10 βαθμοί] Δίνετε η γραμματική G με κανόνες παραγωγής,

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A \mid 1B \mid C \mid E \\ A &\rightarrow 1 \mid 1S \mid 0AA \mid 2 \\ B &\rightarrow 0 \mid 0S \mid 1BB \mid 2 \\ C &\rightarrow 3C \mid C3 \mid 3 \\ D &\rightarrow DD \mid D3D \end{aligned}$$

1. Δώστε μια αριστερότατη παραγωγή για την συμβολοσειρά $w = 001122$.
2. Δώστε μια δεξιότατη παραγωγή για την ίδια συμβολοσειρά.
3. Εξετάστε αν η G είναι διφορούμενη. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 3. [10 βαθμοί] Έστω οι γλώσσες $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ και $A = \overline{L}$. Κατασκευάστε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα η οποία να παράγει την A .

Άσκηση 4. [20 βαθμοί] Κατασκευάστε αυτόματα στοίβας για κάθε μια από τις παρακάτω γλώσσες.

1. $L_1 = \{000^*1\}.$
2. $L_2 = \{100^*101^*\}.$
3. $L_3 = L_1 \cup L_2.$

Άσκηση 5. [10 βαθμοί] Δίνετε η γραμματική G με κανόνες παραγωγής,

$$\begin{aligned} S &\rightarrow bXY Y \mid bXX \\ X &\rightarrow bY Y \mid b \\ Y &\rightarrow aY Y \mid X \end{aligned}$$

Να κατασκευάσετε αυτόματο στοίβας το οποίο αναγνωρίζει την γλώσσα που παράγει η G .

Άσκηση 6. [10 βαθμοί] Δίνετε η γλώσσα

$$L = \{0^{n!} \mid n \geq 0\}.$$

Αποδείξτε ότι δεν είναι CFL.

Άσκηση 7. [10 βαθμοί] Δίνετε η γλώσσα

$$L = \{w_1 \# w_2 \# \dots \# w_k \mid k \geq 2, w_i \in \{0, 1\}^*, \text{ και για κάποια } i \neq j, w_i = w_j\}.$$

Αποδείξτε ότι δεν είναι CFL.

Άσκηση 8. [10 βαθμοί] Έστω η γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G με κανόνες παραγωγής,

$$S \rightarrow S + S \mid S - S \mid S \times S \mid S / S \mid (S) \mid -S \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9$$

Ελέγξτε ποιες από τις συμβολισσεις $w = - + - + 9$, $u = - - - 3$, και $v = 2 + - - 5$ ανήκουν στην $L(G)$.

Άσκηση 9. [bonus] Εξηγήστε τι μετατροπές πρέπει να κάνετε στην γραμματική G της Άσκησης 8 ώστε να παράγονται μόνο συμβολισμοί της μορφής ‘αριθμός + αριθμός’, ‘αριθμός − αριθμός’, ‘αριθμός + − αριθμός’ και ‘αριθμός − − αριθμός’, αλλά όχι ‘αριθμός + − − αριθμός’ ή ‘αριθμός − − − αριθμός’.

Άσκηση 10. [bonus] Έστω αλφάβητο Σ . Για όλες τις συμβολισσεις $w, u \in \Sigma^*$, συμβολίζουμε με $w \hookrightarrow u$ αν μπορούμε να αφαιρέσουμε κανένα, ένα ή και περισσότερα σύμβολα (όχι αναγκαστικά μη-γειτονικά) από την w ώστε να πάρουμε την u . Για παράδειγμα, αν $w = \text{πορεία}$, τότε $\text{πορεία} \hookrightarrow \text{πρα}$, $\text{πορεία} \hookrightarrow \text{πορ}$, αλλά όχι $\text{πορεία} \hookrightarrow \text{παρ}$. Ορίζουμε την γλώσσα $\mathcal{H}(L) = \{u \mid w \in L, w \hookrightarrow u\}$. Αποδείξτε ότι για κάθε L CFL, τότε και η $\mathcal{H}(L)$ είναι CFL.