

ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού

Μη-διαγνωσιμότητα και Αναγωγή

12/11/2026

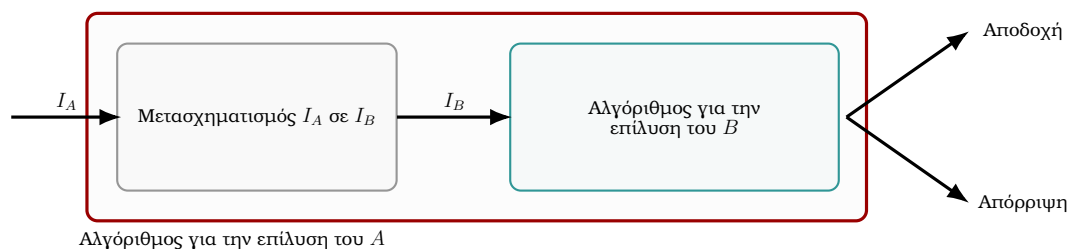
Οι σημειώσεις αυτές δίνουν μια μεθοδολογία για το πως μπορούμε να αποδείξουμε την μη-διαγνωσιμότητα μιας γλώσσας μέσω της αναγωγής μεταξύ προβλημάτων. Έστω τα προβλήματα A και B . Λέμε ότι ένα πρόβλημα A ανάγεται σε ένα πρόβλημα B , $A \leq B$, αν

1. Ο αλγόριθμος που επιλύει το B μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπορουτίνα ώστε να λυθεί το A .
2. Αν η γλώσσα του προβλήματος B είναι διαγνώσιμη, τότε και η γλώσσα του προβλήματος A είναι διαγνώσιμη. Δηλαδή, αν υπάρχει αλγόριθμος που επιλύει το B , τότε υπάρχει αλγόριθμος που επιλύει το A .
3. Αν η γλώσσα του προβλήματος A είναι μη-διαγνώσιμη, τότε και η γλώσσα του προβλήματος B είναι και αυτή με την σειρά της μη-διαγνώσιμη.

Για την αναγωγή θα χρησιμοποιήσουμε το Πρόβλημα Τερματισμού των μηχανών Turing, $HALT_{TM}$.

$$HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ τερματίζει για είσοδο } w \},$$

αλλά η επιχειρηματολογία μπορεί να δουλέψει για οποιοδήποτε γνωστό μη-διαγνώσιμο πρόβλημα, όπως το Πρόβλημα της Απόφασης των μηχανών Turing, A_{TM} .



Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα πρόβλημα, έστω B , είναι μη-επιλύσιμο. Δηλαδή η γλώσσα του προβλήματος B είναι μη-διαγνώσιμη. Θα κάνουμε αναγωγή το πρόβλημα $HALT_{TM}$ στο B .

Αρχικά επιθέτουμε το αντίθετο, ότι το πρόβλημα B είναι επιλύσιμο. Άρα υπάρχει TM, έστω T η οποία διαγιγνώσκει την γλώσσα του B . Θα κατασκευάσουμε μια TM, έστω D , η οποία να διαγιγνώσκει την γλώσσα του $HALT_{TM}$.

$D =$ “Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, δηλαδή το I_A :

1. Κατασκευάζουμε την είσοδο για την T , έστω I_B .
2. Εκτελούμε την T για I_B .
3. Εάν η T αποδέχεται, αποδεχόμαστε/απορρίπτουμε.
Εάν η T απορρίπτει, αποδεχόμαστε/απορρίπτουμε.”

Συνεπώς, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια TM η οποία να διαγιγνώσκει την $HALT_{TM}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, και άρα το B είναι μη-επιλύσιμο.

Στο βήμα 1. πρέπει χρήσει της εισόδου της D , δηλαδή ενός στιγμιότυπου του $HALT_{TM}$, να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο για την T , δηλαδή το I_B . Στο βήμα 3., ανάλογα με το αποτέλεσμα της T θα πρέπει η D να αποδεχθεί ή να απορρίψει.