

ΗΥ-280 Θεωρία Υπολογισμού

Θεώρημα Myhill-Nerode

07/10/2025

Έχουμε δει ότι οι κανονικές γλώσσες μπορούν να χαρακτηριστούν από κανονικές εκφράσεις, DFA και NFA. Σε αυτές τις σημειώσεις θα δείξουμε έναν τέταρτο κομψό χαρακτηρισμό των κανονικών γλωσσών, χρησιμοποιώντας αυτό που είναι γνωστό ως θεώρημα Myhill-Nerode. Αυτός ο χαρακτηρισμός θα είναι χρήσιμος όχι μόνο για να δείξουμε ότι οι γλώσσες είναι κανονικές, αλλά και για να αποδείξουμε πότε οι γλώσσες δεν είναι κανονικές.

Προσβάσιμες καταστάσεις Έστω αλφάβητο Σ και DFA $M = \langle K, \Sigma, \delta, s, F \rangle$. Το M μπορεί να έχει περιττά στοιχεία, για παράδειγμα αν έχει καταστάσεις τις οποίες το αυτόματο δεν μπορεί να προσπελάσει για κανέναν υπολογισμό. Θεωρούμε το σύνολο $K_r \subseteq K$ ως το σύνολο των προσβάσιμων καταστάσεων στο αυτόματο M , και το ορίζουμε με το σύνολο

$$K_r = \{q \in K \mid \exists w \in \Sigma^*, \delta(s, w) = q\}.$$

Αν $K \neq K_r$, μπορούμε απλώς να αφαιρέσουμε από το M τις καταστάσεις $K \setminus K_r$ και να περιορίσουμε τις μεταβάσεις δ μόνο στις καταστάσεις K_r . Το αυτόματο που προκύπτει είναι εκφραστικά ισοδύναμο με το αρχικό. Στη συνέχεια αυτών των σημειώσεων θεωρούμε ότι στα αυτόματα όλες οι καταστάσεις είναι προσβάσιμες.

Σχέσεις Ισοδυναμίας Μια σχέση ισοδυναμίας R σε ένα σύνολο A είναι μια σχέση ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Έστω $a \in A$, το σύνολο

$$\{b \in A \mid aRb\},$$

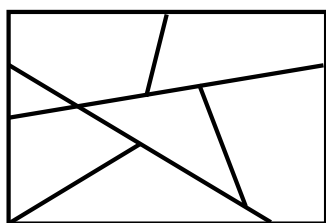
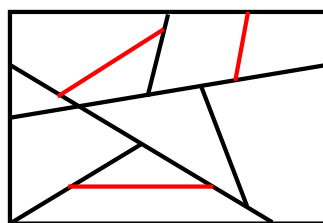
λέγεται κλάση ισοδυναμίας του a και το συμβολίζουμε ως $[a]_R$ (ή απλούστερα $[a]$). Ισχύει ότι οποιαδήποτε δύο στοιχεία $a, b \in A$, $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ αν $a \not R b$, και $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ αν $a R b$.

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που σχετίζονται με μια σχέση ισοδυναμίας R είναι μια διαμέριση Π του A (επίσης συμβολίζεται ως A/R). Αυτό σημαίνει ότι είναι μια οικογένεια μη κενών ανά δύο ξένων συνόλων των οποίων η ένωση είναι ίση με την ίδια την A .

Οι κλάσεις ισοδυναμίας καμιά φορά αναφέρονται ως περιοχές ή blocks της διαμέρισης Π . Ο αριθμός των blocks είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας της R , για τον οποίο έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1. Δείκτης μιας σχέσης ισοδυναμίας R λέγεται ο πληθάριθμος του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας της R .

Δεδομένων δύο οποιωνδήποτε σχέσεων ισοδυναμίας R_1 και R_2 με αντίστοιχες διαμερίσεις Π_1 και Π_2 , $R_1 \subseteq R_2$ αν κάθε block της διαμέρισης Π_1 περιέχεται σε κάποιο block της διαμέρισης Π_2 . Στη συνέχεια, κάθε block της διαμέρισης Π_2 είναι η ένωση των block της διαμέρισης Π_1 , και λέμε ότι το R_1 είναι μια *εκλέπτυνση* (refinement) του R_2 (και ομοίως, το Π_1 είναι μια εκλέπτυνση της Π_2). Παρατηρούμε ότι, η Π_2 έχει το πολύ τόσα blocks όσα και η Π_1 . Στο ακόλουθο σχήμα η R_2 είναι μια εκλέπτυνση της R_1 .

 A/R_1  A/R_2

Δεξιά αναλλοίωτη σχέση ισοδυναμίας στο Σ^*

Έστω αλφάβητο Σ και DFA $M = \langle K, \Sigma, \delta, s, F \rangle$. Ορίζουμε τώρα μια σχέση ισοδυναμίας σε συμβολοσειρές που επάγονται από το M . Αυτή η ισοδυναμία ομαδοποιεί βάσει της κατάστασης που καταλήγει ο υπολογισμός τους στο M , δηλαδή σε ποια κατάσταση μεταβαίνουν με το πέρας του υπολογισμού.

Ορισμός 2 (Ισοδυναμία Myhill-Nerode). Έστω DFA $M = \langle K, \Sigma, \delta, s, F \rangle$, ορίζουμε τη σχέση R_M στο Σ^* ως εξής: για οποιεσδήποτε δύο συμβολοσειρές $x, y \in \Sigma^*$,

$$xR_M y \iff \delta(s, x) = \delta(s, y).$$

Παράδειγμα 1. Μπορούμε να υπολογίσουμε ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της R_M για το DFA $M = \langle K, \Sigma, \delta, s, F \rangle$, με $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $s = q_0$, $F = q_0$, και μεταβάσεις

δ	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_1
q_2	q_0	q_2

Για παράδειγμα,

$$0110111R_M00, \quad 010101R_M\varepsilon, \quad 110R_M0.$$

Υπάρχουν τρεις κλάσεις ισοδυναμίας,

$$[\varepsilon]_{R_M}, \quad [0]_{R_M}, \quad [00]_{R_M}.$$

Παρατηρούμε ότι $L(M) = [\varepsilon]_{R_M}$. Επίσης, οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τις καταστάσεις του M . $\square$

Η σχέση R_M έχει κάποιες σημαντικές ιδιότητες,

Ορισμός 3. Μια σχέση R ορισμένη πάνω στο Σ^* λέγεται δεξιά αναληλοιώτη (right invariant) αν για κάθε $x, y, z \in \Sigma^*$ ισχύει

$$xRy \Rightarrow xzRyz.$$

Πρόταση 1. Η σχέση R_M είναι δεξιά αναληλοιώτη.

Απόδειξη. Έστω DFA $M = \langle K, \Sigma, \delta, s, F \rangle$, με $s = q_0$. Τότε, ισχύει

$$\delta(q_0, xz) = \delta(\delta(q_0, x), z) = \delta(\delta(q_0, y), z) = \delta(q_0, yz).$$

Άρα, για κάθε $x, y, z \in \Sigma^*$ ισχύει $xR_My \Rightarrow xzR_Myz$. $\square$

Πρόταση 2. Η σχέση R_M είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει ότι $xR_Mx \iff \delta(q_0, x) = \delta(q_0, x)$. Επίσης, ισχύει ότι $xR_My \iff \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y) \iff yR_Mx$. Τέλος, αν xR_My και yR_Mz , τότε $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$ και $\delta(q_0, y) = \delta(q_0, z)$. Συνεπώς έχουμε $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, z)$, άρα xR_Mz . Δηλαδή, η R_M είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, άρα είναι σχέση ισοδυναμίας. $\square$

Σχέση ισοδυναμίας ως προς την γλώσσα L

Έστω $L \subseteq \Sigma^*$ μια γλώσσα πάνω στο αλφάβητο Σ , και έστω $x, y \in \Sigma^*$ δύο συμβολοσειρές, όχι απαραίτητα συμβολοσειρές στο L . Αρχικά, θα δώσουμε τον ορισμό των διακεκριμένων επεκτάσεων.

Ορισμός 4. Λέμε ότι μια συμβολοσειρά $z \in \Sigma^*$ είναι μια διακεκριμένη επέκταση για x και y αν ακριβώς ένα από τα xz και yz ανήκει στην L .

Δηλαδή, αν επεκτείνουμε τις x και y κατά τη συμβολοσειρά z , τότε διαφοροποιούνται ως προς την ένταξη τους στην L . Βάσει της διακεκριμένης επέκτασης μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση πάνω στην γλώσσα L .

Ορισμός 5 (Ισοδυναμία ως προς L). Έστω οι συμβολοσειρές $x, y \in \Sigma^*$, λέμε ότι είναι ισοδύναμες ως προς L , που συμβολίζεται $xR_L y$, εάν δεν υπάρχει διακεκριμένη επέκταση μεταξύ των x και y .

Δηλαδή, δύο συμβολοσειρές είναι ισοδύναμες ως προς L εάν, ανεξάρτητα από τη συμβολοσειρά z που τους παρατίθεται, είτε $(xz \in L) \wedge (yz \in L)$ είτε $(xz \notin L) \wedge (yz \notin L)$.

Πρόταση 3. Έστω γλώσσα L πάνω σε αλφάβητο Σ . Η σχέση R_L είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι $xR_L x$ και ότι εάν $xR_L y$, τότε $yR_L x$. Επίσης, εάν $xR_L y$ και $yR_L w$, τότε $xR_L w$. Αυτό συμβαίνει επειδή διαφορετικά, θα υπήρχε μια διακεκριμένη επέκταση z για τις x και w , πράγμα που θα σήμαινε ότι ακριβώς ένα από τα xz και wz βρίσκεται στην L . Αλλά τότε, ανεξάρτητα από το αν το yz βρίσκεται στην L ή όχι, πρέπει να ισχύει ότι το z διακρίνει την y είτε από την x είτε από την w , κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας ότι $xR_L y$ και $yR_L w$. Συνεπώς, η R_L είναι σχέση ισοδυναμίας των συμβολοσειρών στο Σ σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. $\square$

Αυτή η σχέση ισοδυναμίας διαιρεί το σύνολο Σ^* . Δηλαδή, για οποιαδήποτε $x \in \Sigma^*$, η κλάση ισοδυναμίας της x ως προς την L είναι το σύνολο των συμβολοσειρών στο Σ^* που ορίζονται από $[x]_{R_L} = \{y \in \Sigma^* : xR_L y\}$. Αυτό είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που είναι ισοδύναμες με την x υπό τη σχέση R_L .

Παρατηρούμε ότι, για οποιαδήποτε δύο στοιχεία $x, y \in L$, $[x]_{R_L} \cap [y]_{R_L} = \emptyset$ αν δεν ανήκουν στην ίδια κλάση, και $[x]_{R_L} \cap [y]_{R_L} = \emptyset$ αν ανήκουν στην ίδια κλάση. Επομένως, για οποιεσδήποτε δύο συμβολοσειρές $x, y \in \Sigma^*$, οι κλάσεις ισοδυναμίας τους ως προς την L είναι είτε πανομοιότυπες (αν $xR_L y$) είτε ξένες. Αυτό συμβαίνει επειδή αν οι κλάσεις ισοδυναμίας επικάλυπτονταν, θα υπήρχε κάποια συμβολοσειρά w που είναι μέλος και των δύο, αλλά τότε η w θα ήταν ισοδύναμη με όλες τις συμβολοσειρές και στις δύο κλάσεις, και επομένως όλες οι συμβολοσειρές και στις δύο κλάσεις θα ήταν ισοδύναμες μεταξύ τους, καθιστώντας τις κλάσεις ίσες, δεδομένου του τρόπου με τον οποίο τις ορίσαμε.

Σημειώστε επίσης ότι δεν θεωρούμε το κενό σύνολο ως κλάση ισοδυναμίας. Οποιαδήποτε κλάση ισοδυναμίας πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία συμβολοσειρά, συν όλες τις συμβολοσειρές που είναι ισοδύναμες με αυτήν τη συμβολοσειρά ως προς την R_L .

Αυτές οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς μια γλώσσα L έχουν σημαντικές ιδιότητες, οι οποίες συνοψίζονται με την μορφή προτάσεων,

Πρόταση 4. Η ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς L είναι Σ^* .

Απόδειξη. Οποιαδήποτε συμβολοσειρά $x \in \Sigma^*$ ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας: την κλάση όλων των συμβολοσειρών που είναι ισοδύναμες με το x . $\square$

Πρόταση 5. Για οποιαδήποτε κλάση ισοδυναμίας $[x]_{R_L}$ ως προς την L , είτε $[x]_{R_L} \subseteq L$ είτε $[x]_{R_L} \cap L = \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω ότι $[x]_{R_L} \cap L \neq \emptyset$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in [x]_{R_L} \cap L$. Αλλά τότε για οποιοδήποτε $y \in [x]_{R_L}$, έχουμε $xR_L y$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει διακεκριμένη επέκταση μεταξύ των x και y , και συγκεκριμένα, το $z = \varepsilon$ δεν είναι μια τέτοια διακεκριμένη επέκταση. Επομένως, είτε και τα δύο $xz = x$ και $yz = y$ ανήκουν στην L είτε και τα δύο δεν ανήκουν στην L . Αλλά επειδή $x \in L$, πρέπει να έχουμε $y \in L$. Δεδομένου ότι το $y \in L$ ήταν αυθαίρετο, έχουμε $[x]_{R_L} \subseteq L$. $\square$

Πρόταση 6. Για οποιοδήποτε δύο κλάσεις ισοδυναμίας $[x]_{R_L}$ και $[y]_{R_L}$ ως προς το L , αν υπάρχουν συμβολοσειρές $x \in [x]_{R_L}$ και $z \in [x]_{R_L}^*$ με $xz \in [y]_{R_L}$, τότε για όλες οι συμβολοσειρές $y \in [x]_{R_L}$ ισχύει $yz \in [y]_{R_L}$.

Απόδειξη. Έστω ότι αν $yz \notin [y]_{R_L}$ για κάποιο $y \in [x]_{R_L}$, αυτό θα σήμαινε ότι το yz δεν είναι ισοδύναμο με $xz \in [y]_{R_L}$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει κάποια διακριτική επέκταση w , δηλαδή ακριβώς ένα από τα yzw και xzw βρίσκεται στο L . Αλλά σε αυτήν την περίπτωση, η συμβολοσειρά zw είναι μια διακριτική επέκταση για τα x και y , γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $x, y \in [x]_{R_L}$. $\square$

Χαρακτηρισμός κανονικών γλωσσών μέσω του Θεωρήματος Myhill–Nerode

Τώρα που έχουμε εισαγάγει τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται από μια γλώσσα A , μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα Myhill–Nerode, το οποίο δίνει έναν νέο χαρακτηρισμό των κανονικών γλωσσών με βάση τον αριθμό τέτοιων κλάσεων.

Θεώρημα 1. Έστω Σ ένα αλφάβητο και έστω $L \subseteq \Sigma^*$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα,

1. η L είναι κανονική,
2. Η γλώσσα L είναι ένωση κάποιων κλάσεων ισοδυναμίας μιας δεξιά αναληθιώτης σχέσης ισοδυναμίας R με πεπερασμένο δείκτη,
3. Η σχέση R_L έχει πεπερασμένο δείκτη.

Διαίσθηση. Ένα DFA για την L (αν υπάρχει) έχει μόνο πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Για κάθε κατάσταση q , θεωρούμε την κλάση των συμβολοσειρών που οδηγούν το DFA να φτάσει σε αυτήν την κατάσταση. Τότε αυτές οι συμβολοσειρές είναι όλες ισοδύναμες. Δηλαδή, αν το DFA φτάσει στην q όταν διαβάζει την συμβολοσειρά x και την συμβολοσειρά y , τότε ανεξάρτητα από το ποια συμβολοσειρά z παραθέτουμε στην x και στην y , το DFA θα φτάσει στην ίδια κατάσταση όταν διαβάζει την xz και την yz . Επομένως, είτε ανήκουν και οι δύο στην L (αν η προσπίπτουσα κατάσταση είναι κατάσταση αποδοχής) είτε και οι δύο δεν ανήκουν στην L (αν η προσπίπτουσα κατάσταση δεν είναι κατάσταση αποδοχής).

Η διαίσθηση θα πρέπει επομένως να είναι ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας σε σχέση με μια κανονική γλώσσα L αντιστοιχεί σε μια κατάσταση ενός DFA για την L , με μια συμβολοσειρά x να ανήκει στην κλάση αν και μόνο αν το DFA φτάσει σε αυτήν την κατάσταση όταν εκτελείται στο x . Φυσικά, υπάρχουν πολλά πιθανά DFA για μια κανονική γλώσσα. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αποδεικνύεται ότι αντιστοιχούν στις καταστάσεις του *ελάχιστου δυνατού* DFA για την L , και ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι ο ελάχιστος αριθμός καταστάσεων σε ένα DFA για την L . Εάν η L δεν είναι κανονική, αυτός ο 'ελάχιστος αριθμός καταστάσεων' είναι άπειρος, επειδή δεν υπάρχει πεπερασμένος αριθμός καταστάσεων που να επαρκεί για να αναγνωρίσει την L . Αυτό αντιστοιχεί στο ότι υπάρχουν άπειρες κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την L .

Απόδειξη. [1 $\Rightarrow$ 2] Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι η L είναι κανονική, και έστω $M = \langle K, \Sigma, \delta, s, F \rangle$ ένα DFA που αναγνωρίζει την L . Για κάθε $q \in K$, έστω $C_q \subseteq \Sigma^*$ το σύνολο όλων των συμβολοσειρών x έτσι ώστε το M να φτάνει στην κατάσταση q όταν εκτελείται στο x : δηλαδή,

$$C_q = \{x \in \Sigma^* : \delta(q_0, x) = q\}.$$

Τώρα, για κάθε $q \in K$ και κάθε $x, y \in C_q$, έχουμε $xR_M y$. Αυτό συμβαίνει επειδή για οποιοδήποτε $z \in \Sigma^*$, όταν το M εκτελείται στο xz φτάνει στο $\delta(q, z)$, και όταν το M εκτελείται στο yz φτάνει επίσης στο $\delta(q, z)$. Έτσι, αν $\delta(q, z) \in F$ έχουμε $xz, yz \in A$, και αν $\delta(q, z) \notin F$ έχουμε $xz, yz \notin A$. Και στις δύο περιπτώσεις, η συμβολοσειρά z δεν διακρίνει το x και το y , επομένως δεν έχουν διακεκριμένη επέκταση και $xR_A y$.

Γνωρίζουμε ότι όλες οι συμβολοσειρές εντός του C_q είναι ισοδύναμες για κάθε $q \in K$. Σημειώστε επίσης ότι τα σύνολα C_q είναι όλα ξένα. Τώρα, αν το E είναι μια κλάση ισοδυναμίας ως προς την L , τότε αν το E περιέχει οποιαδήποτε συμβολοσειρά στο C_q , πρέπει να περιέχει όλα τα C_q (αφού όλες οι συμβολοσειρές στο C_q είναι ισοδύναμες ως προς την L). Επομένως, το E πρέπει να είναι μια ένωση ορισμένων από τα σύνολα C_q . Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την L είναι ενώσεις των συνόλων C_q , επομένως μπορεί να υπάρχουν μόνο πεπερασμένα πολλές από αυτές (στην πραγματικότητα, το πολύ $|K|$, αφού πρέπει να είναι ξένα). Επομένως, αν η L είναι κανονική, έχει πεπερασμένα πολλές κλάσεις ισοδυναμίας, και ο αριθμός τέτοιων κλάσεων είναι το πολύ ο αριθμός των καταστάσεων στο DFA για την L .

[2 $\Rightarrow$ 3] Έστω ότι η γλώσσα L είναι ένωση κλάσεων μιας σχέσης ισοδυναμίας R που έχει πεπερασμένο δείκτη $k < \infty$. Θα δείξουμε ότι ο δείκτης της R_L είναι το πολύ k , άρα πεπερασμένος.

Δείχνουμε κατ' αρχήν τη συνεπαγωγή $xRy \Rightarrow xR_L y$. Έστω $z \in \Sigma^*$, $xz \in L$ και xRy . Επειδή R δεξιά αναλλοίωτη έπεται $xzRyz$. Άρα το yz ανήκει στην ίδια κλάση της R με το xz . Αφού όμως $xz \in L$, και η L είναι ένωση κλάσεων της R , ολόκληρη η κλάση της R του xz περιέχεται στην L , άρα $yz \in L$. Δείξαμε δηλαδή ότι $xz \in L \Rightarrow yz \in L$, και ακριβώς το ίδιο προκύπτει και η αντίστροφη συνεπαγωγή, άρα $xR_L y$, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Η συνεπαγωγή που δείξαμε ($xRy \Rightarrow xR_Ly$) σημαίνει ότι κάθε κλάση της R περιέχεται εξ ολοκλήρου σε μια κλάση της R_L . Πράγματι, έστω $x \in C$, όπου A μια R -κλάση, και έστω $x \in S$, όπου S η R_L -κλάση του x . Δείχνουμε τότε ότι $C \subseteq S$. Έστω λοιπόν $y \in C$. Αυτό σημαίνει xRy άρα και xR_Ly , οπότε $y \in S$.

Αφού κάθε κλάση R περιέχεται σε μια κλάση R_L , δεν μπορούν οι κλάσεις R_L είναι περισσότερες από τις κλάσεις R , γιατί τότε θα υπήρχε κάποια κλάση R_L που δε θα περιείχε καμιά κλάση R και θα ήταν κενή, πράγμα που εξ ορισμού δε γίνεται.

[3 $\Rightarrow$ 1] Έστω ότι η R_L έχει πεπερασμένο δείκτη. Έστω k ο αριθμός τέτοιων κλάσεων και έστω $C_1, C_2, \dots, C_k$ οι ίδιες οι κλάσεις ισοδυναμίας, με $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k = \Sigma^*$ και $C_i \cap C_j = \emptyset$ όποτε $i \neq j$. Κατασκευάζουμε ένα DFA M για την L . Θα έχει μία κατάσταση q_i για κάθε κλάση ισοδυναμίας C_i , έτσι ώστε το σύνολο των καταστάσεων $K = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ να έχει μέγεθος k . Το αλφάβητο του M θα είναι Σ . Ορίζουμε ως αρχική κατάσταση την q_0 που αντιστοιχεί στην κλάση ισοδυναμίας C_ε που περιέχει την κενή συμβολοσειρά, δηλαδή, το σύνολο C_ε με $\varepsilon \in C_\varepsilon$.

Ορίζουμε το σύνολο των καταστάσεων αποδοχής ως $F = \{q_i : C_i \subseteq L\}$. Τέλος, ορίζουμε τη συνάρτηση μετάβασης δ ως εξής: για οποιοδήποτε $a \in \Sigma$, για οποιαδήποτε κλάση ισοδυναμίας C_i , και για οποιοδήποτε $x, y \in C_i$, η κλάση ισοδυναμίας των xa και ya είναι η ίδια. Έστω αυτή η κλάση ισοδυναμίας (που ορίζεται από τα a και C_i) C_j . Στη συνέχεια, ορίζουμε $\delta(q_i, a) = q_j$.

Αυτό σημαίνει ότι η $\delta(q_0, x)$ θα είναι η κατάσταση που αντιστοιχεί στην κλάση ισοδυναμίας της x . Μπορούμε να το αποδείξουμε αυτό με επαγωγή: ισχύει εξ ορισμού για $x = \varepsilon$ (βάση επαγωγής), και αν ισχύει για συμβολοσειρές μήκους k και η x είναι μια συμβολοσειρά μήκους $k + 1$, μπορούμε να γράψουμε $x = wa$ με $|w| = k$, έτσι ώστε η $\delta(q_0, w)$ να αντιστοιχεί στην κλάση ισοδυναμίας της w , και στη συνέχεια η $\delta(q_0, x) = \delta(\delta(q_0, w), a)$ είναι η κλάση ισοδυναμίας της wa , ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι αυτό το DFA αναγνωρίζει την L . Για να το δούμε αυτό, ας υποθέσουμε πρώτα ότι $x \in L$. Τότε $\delta(q_0, x) = q_i$ με $x \in C_i$, και επειδή $x \in L$, έχουμε $C_i \cap L \neq \emptyset$, που σημαίνει $C_i \subseteq L$. Επομένως, από τον ορισμό του F , έχουμε $q_i \in F$, άρα το DFA δέχεται το x . Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το x γίνεται αποδεκτό από το DFA. Τότε $\delta(q_0, x) \in F$, που σημαίνει ότι η κλάση ισοδυναμίας C_i του x ικανοποιεί το $C_i \subseteq L$. Αφού $x \in C_i$, πρέπει να έχουμε $x \in L$.

Συμπεραίνουμε ότι πεπερασμένος αριθμός κλάσεων ισοδυναμίας συνεπάγεται ότι η L είναι κανονική. $\square$

Επομένως, αν η L είναι κανονική γλώσσα, έχει πεπερασμένο αριθμό κλάσεων ισοδυναμίας, και ο αριθμός τέτοιων κλάσεων είναι το πολύ ο ελάχιστος αριθμός καταστάσεων σε οποιοδήποτε DFA για την L . Δηλαδή, είναι το πολύ ο αριθμός καταστάσεων στο ελάχιστο DFA για την L .

Χρήση Θεωρήματος Myhill–Nerode

Το θεώρημα Myhill–Nerode μας δίνει έναν ακόμη χαρακτηρισμό του πότε μια γλώσσα είναι κανονική. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι οι γλώσσες είναι κανονικές, απλώς απαριθμώντας όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας εάν υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι. Ωστόσο, στην πράξη, αυτό αποδεικνύεται αρκετά παρόμοιο με την απλή κατασκευή ενός DFA για τη γλώσσα. Επομένως, για να δείξουμε ότι μια γλώσσα είναι κανονική, το θεώρημα Myhill–Nerode συνήθως δίνει μόνο μια υπόδειξη για το πώς να κατασκευάσουμε ένα DFA, αλλά δεν είναι ουσιαστικά ευκολότερο από την άμεση κατασκευή ενός DFA ή NFA.

Είναι ενδιαφέρον, ωστόσο, ότι το θεώρημα Myhill–Nerode μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι οι γλώσσες δεν είναι κανονικές. Για να δείξουμε ότι η L δεν είναι κανονική, αρκεί να δείξουμε ότι ορίζει άπειρες πολλές κλάσεις ισοδυναμίας. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι υπάρχουν άπειρες πολλές συμβολοσειρές $x_1, x_2, x_3, \dots$ τέτοιες ώστε καμία από αυτές να μην είναι ισοδύναμη ως προς την L . Με άλλα λόγια, αρκεί να βρούμε μια ακολουθία συμβολοσειρών $x_1, x_2, x_3, \dots \in \Sigma^*$ τέτοιες ώστε για κάθε $i \neq j$, να έχουμε κάποιο $z \in \Sigma^*$ με ακριβώς ένα από τα $x_i z$ και $x_j z$ να βρίσκεται στην L .¹

Παράδειγμα 2. Ας εξετάσουμε την κανονικότητα της $L = \{0^k 1^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Επιλέγουμε μια ακολουθία συμβολοσειρών $x_i = 0^i$ για όλα τα $i \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια, για οποιοδήποτε $i \neq j$, παίρνουμε την συμβολοσειρά $z = 1^i$, και τότε θα έχουμε $x_i z \in L$ αλλά $x_j z \notin L$. Αυτό αρκεί για να συμπεράνουμε ότι η L δεν είναι κανονική. $\square$

Παράδειγμα 3 (Αποτυχία Λήμματος Άντλησης). Έστω

$$B = \{01^k 2^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup L((\varepsilon \cup 000^*)1^*2^*).$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η B δεν είναι κανονική;

Αποδεικνύεται ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας το λήμμα άντλησης. Ο λόγος είναι ότι το B στην πραγματικότητα ικανοποιεί το λήμμα άντλησης: υπάρχει ένα μήκος άντλησης $n = 2$ τέτοιο ώστε για όλες τις συμβολοσειρές $w \in B$ μήκους τουλάχιστον 2, μπορούμε να αναλύσουμε το $w = xyz$ με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Εάν $w = 01^k 2^k$, θα επιλέξουμε $x = \varepsilon$, $y = 0$, $z = 1^k 2^k$ και θα παρατηρήσουμε ότι $xy^i z = 0^i 1^k 2^k$, το οποίο είναι στο B για όλα τα i . Από την άλλη πλευρά, αν $w = 0^m 1^k 2^\ell$ με $m \geq 2$, μπορούμε να επιλέξουμε $y = 00$, $x = \varepsilon$, $z = 0^{m-2} 1^k 2^\ell$, το οποίο μας επιτρέπει και πάλι να αντλήσουμε το y . Τέλος, αν $w = 1^k 2^\ell$, μπορούμε να επιλέξουμε $x = \varepsilon$, έστω y το πρώτο σύμβολο του w , και έστω z τα υπόλοιπα σύμβολα. Αυτό μας επιτρέπει και πάλι να αντλήσουμε το y , επομένως το λήμμα άντλησης ικανοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις.

¹Οι συμβολοσειρές x_i δεν χρειάζεται να βρίσκονται οι ίδιες στη γλώσσα L . Μπορούν να είναι τυχαίες συμβολοσειρές πάνω από την Σ .

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε ότι η B δεν είναι κανονική είναι να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Myhill-Nerode. Μπορούμε να επιλέξουμε $x_i = 01^i$ για όλα τα $i \in \mathbb{N}$, και να παρατηρήσουμε ότι κάθε φορά που το $i \neq j$, μπορούμε να πάρουμε $z = 2^i$ και να έχουμε $x_i z \in B$, $x_j z \notin B$.

Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε ότι το B δεν είναι κανονικό είναι να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες κλεισίματος. Θα θέλαμε να μεγεθύνουμε τις συμβολοσειρές στη B που ξεκινούν μόνο με ένα 0, αφού αυτές είναι οι συμβολοσειρές που φαίνονται μη κανονικές. Για να το κάνουμε αυτό, θα ορίσουμε $C = L(01^*2^*)$ και θα εξετάσουμε το $B \cap C$. Αν το B ήταν κανονικό, τότε το $B \cap C$ θα ήταν κανονικό (αφού οι κανονικές γλώσσες είναι κλειστές ως προς την τομή και επειδή το C είναι κανονικό, καθώς έχει μια κανονική έκφραση). Ωστόσο,

$$B \cap C = \{01^k 2^k : k \in \mathbb{N}\},$$

η οποία γλώσσα μπορούμε να δείξουμε ότι είναι μη κανονική χρησιμοποιώντας το λήμμα άντλησης. □