

# HY240: Δομές Δεδομένων

## Εαρινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2017-18

### Παναγιώτα Φατούρου

## 1<sup>ο</sup> Σετ Ασκήσεων

**Ημερομηνία Παράδοσης:** Δευτέρα, 26 Φεβρουαρίου 2018

**Τρόπος Παράδοσης:** Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν είτε σε ηλεκτρονική μορφή χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin (δείτε οδηγίες στην ιστοσελίδα του μαθήματος), είτε στους βοηθούς του μαθήματος, την Δευτέρα, 26 Φεβρουαρίου 2018, ώρα 13:00-14:00. Ασκήσεις που παραδίδονται μετά τις 14:00 της Δευτέρας, 26/02/2018 θα θεωρούνται εκπρόθεσμες. Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turning (το αρχείο που θα αποστείλετε πρέπει να είναι σε μορφή pdf). **Ασκήσεις μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου δεν γίνονται δεκτές.**

### Άσκηση 1

Βρείτε την τάξη (βάσει των συμβολισμών  $O$ ,  $\Omega$  και  $\Theta$ ) της χρονικής πολυπλοκότητας  $T(n)$  των ακόλουθων αλγορίθμων:

- α. `Procedure Mystery(integer n) {  
    for (i=1; i <= n; i++) do  
        for (j = n; j <= n; j++) do  
            for (k = j; k <= n; k++) do x = x+1;  
    }  
}`
- β. `Procedure Puzzle(int n) {  
    for (j = 1; j <= n; j++) do  
        for (k = n2; k >= j; k--) do  
            for (m = 1; m <= 2* log n; m++) do x = x+1;  
    }  
}`
- γ. `Procedure FindMyComplexity2(int n) {  
    for (j = n; j <= n2; j++) do  
        for (k = 2n-1; k <= 2n; k++) do  
            for (m = 1 to n) do x = x+1;  
    }  
}`

### Άσκηση 2

- α. Θεωρήστε τρεις συναρτήσεις  $f(n)$ ,  $g(n)$  και  $h(n)$ , με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και πεδίο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:
- Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $a > 1$  και  $b > 1$ , αν η  $f(n) = O(\log_b n)$ , τότε ισχύει ότι  $f(n) = O(\log_a n)$ .
  - Αν  $f(n) = O(g(n))$ , τότε για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ ,  $f^k(n) = O(g^k(n))$  (όπου  $f^k(n) = (f(n))^k$ ).
- β. Παρουσιάστε αυστηρό ασυμπτωτικό φράγμα για κάθε μια από τις ακόλουθες συναρτήσεις. Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.
- $T(n) = 3n^2 + 8n \log n - 3$

ii.  $T(n) = (n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (17 \log n + 19)(n^3 + 2)$

### Άσκηση 3

- α. Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να αποδείξετε ότι αν  $n$  άνθρωποι βρίσκονται σε μια ουρά, όπου  $n$  είναι ένας θετικός ακέραιος, και το πρώτο άτομο στην ουρά είναι μια γυναίκα ενώ το τελευταίο άτομο στην ουρά είναι ένας άνδρας, τότε κάπου στην ουρά υπάρχει μια γυναίκα ακριβώς πριν από έναν άνδρα.
- β. Βρείτε έναν τύπο για το άθροισμα των πρώτων  $n$  άρτιων θετικών ακεραίων και αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι ο τύπος που βρήκατε είναι σωστός.

### Άσκηση 4

- α. i. Σχεδιάστε αναδρομικό αλγόριθμο που να υπολογίζει το  $nx$  όπου  $n$  είναι ένας θετικός ακέραιος και  $x$  είναι ένας ακέραιος.
- ii. Παρουσιάστε αναδρομική σχέση που θα περιγράφει την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που σχεδιάσατε στο ερώτημα i.
- iii. Επιλύστε την αναδρομική σχέση του ερωτήματος ii. χρησιμοποιώντας επαναληπτική αντικατάσταση και μελετήστε την τάξη της.
- β. i. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για τον αριθμό των μεταθέσεων ενός συνόλου με  $n$  στοιχεία.
- ii. Χρησιμοποιήστε την αναδρομική σχέση για να βρείτε τον ακριβή αριθμό των μεταθέσεων ενός συνόλου με  $n$  στοιχεία.

### Άσκηση 5

Δίνεται ένας πίνακας  $A[1 \dots n]$  για τον οποίο ισχύει ότι υπάρχει ένας ακέραιος  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  τέτοιος ώστε:

- $A[i] < A[i + 1]$  για κάθε  $1 \leq i < m$ , και
- $A[i] > A[i + 1]$  για κάθε  $m \leq i < n$ .

Είναι αξιοσημείωτο πως τα στοιχεία του  $A$  μέχρι και το  $m$ -οστό είναι σε αύξουσα διάταξη ενώ τα στοιχεία του  $A$  που έπονται του  $m$ -οστού στοιχείου είναι σε φθίνουσα διάταξη. Επομένως, το στοιχείο  $A[m]$  είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του πίνακα.

- i. Σχεδιάστε **αναδρομικό αλγόριθμο** που θα υπολογίζει το μέγιστο στοιχείο του  $A$ . **Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να έχει χρονική πολυπλοκότητα  $O(\log n)$ .**
- ii. Διατυπώστε μια αναδρομική σχέση για το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σας.
- iii. Επιλύστε την αναδρομική σχέση που προτείνετε στο ερώτημα ii. και μελετήστε την τάξη της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου σας.
- iv. Ποια είναι η χωρική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (δηλαδή πόση μνήμη απαιτείται για να εκτελεστεί ο αλγόριθμος);

**Υπόδειξη:** Εφόσον για κάθε ακέραιο  $1 \leq i < n$ , είτε  $A[i] < A[i + 1]$  ή  $A[i] > A[i + 1]$ , ισχύει ότι:

1. Αν  $A[i] < A[i + 1]$ , τότε το μέγιστο στοιχείο του  $A$  βρίσκεται στο κομμάτι  $A[i + 1..n]$ .
2. Αν όμως  $A[i] > A[i + 1]$ , τότε το μέγιστο στοιχείο του  $A$  βρίσκεται στο κομμάτι  $A[1..i]$ .

Χρησιμοποιήστε τις παραπάνω παρατηρήσεις για να σχεδιάσετε τον αλγόριθμό σας. Προσοχή στην πολυπλοκότητα που ζητείται.