

HY240: Δομές Δεδομένων
Χειμερινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2023-24
Παναγιώτα Φατούρου

3^ο Σετ Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: Δευτέρα, 4 Δεκεμβρίου 2023

Τρόπος Παράδοσης: Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν μέχρι την Δευτέρα, 4 Δεκεμβρίου 2023, **ώρα 14:59** στο βοηθό του μαθήματος που θα κάνει ώρες γραφείου τη μέρα της παράδοσης για να παραλάβει τις ασκήσεις. Ασκήσεις που παραδίδονται μετά τις **14:59** της Δευτέρας, 4/12/2023, θεωρούνται εκπρόθεσμες. Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin. Οι ασκήσεις που παραδίδονται ηλεκτρονικά θα πρέπει να είναι σε μορφή pdf, να είναι ευανάγνωστες και να περιέχουν σε όλες τις σελίδες το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ του/της φοιτητή/ήτριας στον/στην οποίο/α ανήκουν.

Άσκηση 1 [20 Μονάδες]

1. Αλγόριθμος Ελέγχου Πληρότητας Δυαδικών Δένδρων [10M]

Παρουσιάστε ψευδοκώδικα για έναν αναδρομικό αλγόριθμο που θα ελέγχει αν ένα δυαδικό δένδρο είναι πλήρες. Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας και ποια η χωρική επιβάρυνση που αυτός επιφέρει;

2. Αλγόριθμος σε (όχι απαραίτητα δυαδικό) διατεταγμένο δένδρο [10M]

Παρουσιάστε αλγόριθμο, ο οποίος θα παίρνει ως όρισμα έναν δείκτη στη ρίζα ενός δυαδικού δένδρου το οποίο υλοποιεί (ένα όχι-απαραίτητα δυαδικό) διατεταγμένο δένδρο και έναν ακέραιο k . Ο αλγόριθμος θα πρέπει να εξετάζει αν το k -οστό παιδί (αν υπάρχει) κάθε κόμβου στο μη-δυαδικό διατεταγμένο δένδρο έχει άρτιο κλειδί.

Μετά το πέρας της εκτέλεσης του αλγορίθμου σας, το δυαδικό δένδρο που αναπαριστά το διατεταγμένο θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο.

α. Παρουσιάστε ψευδοκώδικα για τον αλγόριθμό σας.

β. Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας και ποια η χωρική επιβάρυνση που αυτός επιφέρει;

Άσκηση 2 [20 Μονάδες]

Θεωρήστε ένα ταξινομημένο δυαδικό δένδρο T (δηλαδή ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης), ύψους h . Ζητείται αλγόριθμος ο οποίος θα δημιουργεί ένα νέο δένδρο T' που θα περιέχει τα ίδια κλειδιά με το T και θα έχει ύψος $O(\log n)$, όπου n είναι το πλήθος των κόμβων του T . Το αρχικό δένδρο παραμένει αναλλοίωτο κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

Υπόδειξη: Τοποθετήστε τα στοιχεία του T σ' έναν πίνακα, ο οποίος θα είναι ταξινομημένος σε αύξουσα διάταξη, σε χρόνο $O(n)$. Βάσει του πίνακα αυτού, φτιάξτε το δένδρο T' που θα έχει ύψος $O(\log n)$.

Άσκηση 3 [20 Μονάδες]

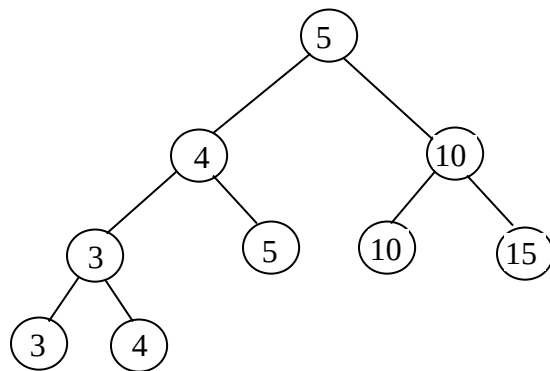
Έστω η επέκταση του αφηρημένου τύπου δεδομένων Λεξικό που υποστηρίζει επιπρόσθετα των $\text{Insert}()$, $\text{Delete}()$ και $\text{Search}()$, τη λειτουργία $\text{Split}(D, x)$, η οποία πραγματοποιεί διάσπαση του λεξικού D σε δύο νέα λεξικά D_1 και D_2 ώστε το πρώτο να αποτελείται από μικρότερα ή ίσα του x κλειδιά και το δεύτερο να έχει μεγαλύτερα του x κλειδιά, όπου x είναι κάποιο κλειδί που μπορεί να ανήκει ή όχι στο D . Θεωρήστε ότι το Λεξικό υλοποιείται με ταξινομημένα δυαδικά δένδρα. Παρουσιάστε αλγόριθμο ο οποίος να υλοποιεί την $\text{split}(D, x)$ (δηλαδή αλγόριθμο που παίρνει ως ορίσματα ένα δείκτη στη ρίζα του ταξινομημένου δένδρου που αναπαριστά το λεξικό D και το κλειδί x και επιστρέφει δύο δείκτες στις ρίζες των ταξινομημένων δένδρων που θα αναπαριστούν τα λεξικά D_1 και D_2). Η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας θα πρέπει να είναι $O(h)$, όπου h είναι το ύψος του T και η χωρική επιβάρυνση θα πρέπει να είναι $O(1)$.

Άσκηση 4 [40 Μονάδες]

Τα φυλλοπροσανατολισμένα δένδρα δυαδικής αναζήτησης (leaf-oriented binary search trees) αποτελούν μια εναλλακτική υλοποίηση του αφηρημένου τύπου δεδομένων του λεξικού. Ορίζονται ως εξής: (α) Όλα τα κλειδιά του λεξικού αποθηκεύονται στα φύλλα του δένδρου, από αριστερά προς τα δεξιά κατά μη φθίνουσα τιμή κλειδιού, και (β) οι εσωτερικοί κόμβοι αποθηκεύουν κλειδιά (που δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε κλειδιά του λεξικού), έτσι ώστε να ισχύει η κάτωθι αμετάβλητη συνθήκη σε κάθε κόμβο v :

*Το κλειδί του αριστερού παιδιού του v είναι μικρότερο ή ίσο από αυτό του v ,
ενώ το δεξιό παιδί του v διαθέτει κλειδί μεγαλύτερο από εκείνο του v*

Παρατηρήστε ότι βάσει του ορισμού, οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν και τους δύο δείκτες μη κενούς, ενώ και οι δύο δείκτες των φύλλων είναι κενοί. Ένα παράδειγμα φυλλοπροσανατολισμένου δένδρου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.



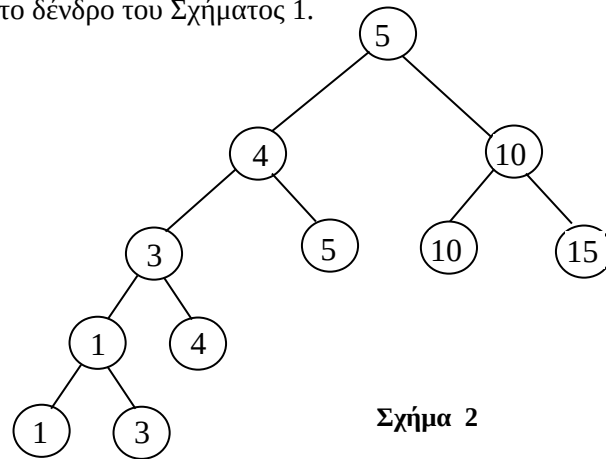
Σχήμα 1

- α. Παρουσιάστε αλγόριθμους εισαγωγής, διαγραφής και αναζήτησης σε φυλλοπροσανατολισμένα δένδρα δυαδικής αναζήτησης. Οι αλγόριθμοί σας θα πρέπει να έχουν χρονική πολυπλοκότητα $O(h)$, όπου h είναι το ύψος του δένδρου και χωρική επιβάρυνση $O(1)$.
[Εισαγωγή: 10M, Διαγραφή: 10M, Αναζήτηση: 5M]

- β. Περιγράψτε αλγόριθμο ο οποίος, δοθέντος **ενός φύλλου** v σε ένα διπλά-συνδεδεμένο φυλλοπροσανατολισμένο δένδρο, θα βρίσκει **το φύλλο** που περιέχει το **αμέσως μεγαλύτερο** κλειδί από εκείνο του v μεταξύ των κλειδιών όλων των φύλλων του δένδρου. Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(h)$, όπου h είναι το ύψος του δένδρου και χωρική επιβάρυνση $O(1)$. [15M]

Διευκρινήσεις επί των λειτουργιών της Εισαγωγής και της Διαγραφής:

1. Για να εισάγουμε έναν νέο κόμβο, v , με κλειδί K σε ένα φυλλοπροσανατολισμένο δένδρο δυαδικής αναζήτησης, εκτελούμε αναζήτηση για να βρούμε το φύλλο, v' , το οποίο θα έπρεπε να αποτελέσει τον γονικό κόμβο του v στο δένδρο. Ωστόσο, το κλειδί, K' , του v' πρέπει να εξακολουθήσει να εμφανίζεται σε φύλλο του δένδρου. Για να επιτευχθεί αυτό, αντικαθιστούμε τον v' από ένα δένδρο τριών κόμβων, το οποίο αποτελείται από έναν εσωτερικό κόμβο με δύο παιδιά που και τα δύο είναι φύλλα. Το αριστερό από τα δύο αυτά φύλλα καθώς και ο v έχουν κλειδί $\min\{K, K'\}$, ενώ το δεξιό φύλλο έχει κλειδί $\max\{K, K'\}$. Για παράδειγμα, το δένδρο του Σχήματος 2 είναι το δένδρο που προκύπτει μετά την εισαγωγή του κλειδιού 1 στο δένδρο του Σχήματος 1.



2. Για να διαγράψω έναν κόμβο, v , από ένα φυλλοπροσανατολισμένο δένδρο δυαδικής αναζήτησης, βρίσκω τον γονικό του κόμβο, v' , καθώς επίσης και τον γονικό κόμβο του v' , έστω v'' . Για τη διαγραφή, αντικαθιστώ τον δείκτη του v'' που δείχνει στον v' , ώστε αυτός να δείχνει στον αδελφικό κόμβο του v . Για παράδειγμα, το δένδρο του Σχήματος 3 είναι το δένδρο που προκύπτει μετά τη διαγραφή του κλειδιού 10 από το δένδρο του Σχήματος 1.

