

HY240: Δομές Δεδομένων

Χειμερινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2022-23

Παναγιώτα Φατούρου

1^ο Σετ Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: Δευτέρα, 17 Οκτωβρίου 2022

Τρόπος Παράδοσης: Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν σε ηλεκτρονική μορφή χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin (δείτε οδηγίες στην ιστοσελίδα του μαθήματος). Ασκήσεις που παραδίδονται μετά τις 11:59 πμ της Δευτέρας, 17/10/2022 θεωρούνται εκπρόθεσμες. Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin.

Άσκηση 1 [39 μονάδες]

α. Απαντήστε τα ακόλουθα ερωτήματα. [12M]

- i. Ισχύει πως $4n^2 = \Theta(n^2 \log n)$ και γιατί;
- ii. Ισχύει πως $n^3 2^n = O(4^n)$ και γιατί;
- iii. Ισχύει πως $5n^3 + 10n^2 \log n = O(n^2 \log n)$ και γιατί;

β. Για κάθε συνάρτηση $f(n)$ παρακάτω, βρείτε την απλούστερη συνάρτηση $g(n)$ τ.ω. $f(n) = \Theta(g(n))$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. [12M]

- i. $f(n) = (n \log n + n^2)(\log n + n)$
- ii. $f(n) = \log(2^n + 4) + \log n^2$
- iii. $f(n) = n^3(\log n + \sqrt{n} \log n)$

γ. Διατάξτε τις ακόλουθες συναρτήσεις με βάση τον αυξητικό τους χαρακτήρα, δηλαδή βρείτε μια διάταξη $g_1, \dots, g_{15}$ των συναρτήσεων η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, $g_3 = \Omega(g_4)$, $g_4 = \Omega(g_5)$, $\dots$, $g_{14} = \Omega(g_{15})$. Διαμερίστε τη λίστα που θα προκύψει σε κλάσεις ισοδυναμίας τ.ω., οι $f(n)$ και $g(n)$ να ανήκουν στην ίδια τάξη αν και μόνο αν $f(n) = \Theta(g(n))$. Θεωρήστε πως η βάση όλων των λογαρίθμων που παρουσιάζονται στη συνέχεια είναι το 2. [15M]

$n \log(\sqrt[3]{n})$	$n^2 \log^2 n$	10^n	$2^{\log n}$	$(1/2)^n$
$n^3 + n \log^2 n$	$\log^2 n$	$4^{\log n}$	$(n^{\log n})^2$	$n \log n$
$\log(\sqrt{n}^{\log n})$	$n \log \log n$	n	n^2	$\sqrt{n} 2^{\log n}$

Άσκηση 2 [24 μονάδες]

Βρείτε το πλήθος των φορών $T(n)$ που θα εκτελεστεί η εντολή “ $x = x+1$ ” σε κάθε έναν από τους παρακάτω κώδικες. Μελετήστε την τάξη του $T(n)$ (βάσει των συμβολισμών O , Ω και Θ).

α. Procedure Mystery(integer n) {

- ```

for j = 1 to $n^{1/2}$ do
 for k = n down to j do
 for m = 1 to $\log n$ do $x = x+1$;
 }
}

```
- β. Procedure Puzzle(int n) {  
 for (i = n; i <= n + 100; i++) do  
 for (k =  $n^2$ ; k >= i; k--) do  
 for (m = 1; m <= n; m = m+2) do  $x = x+1$ ;  
 }
- γ. Procedure FindMyComplexity(int n) {  
 for j = n to  $n^2$  do  
 for k = n down to  $\log^2 n$  do  
 for m =  $2^{n-1}$  to  $2^n$  do  $x = x+1$ ;  
 }

### Άσκηση 3 [37 μονάδες]

- α. Παρουσιάστε έναν **αναδρομικό** αλγόριθμο που θα ονομάζεται Separate(int A[], int i, int j). Η Separate(A, i, j) θα πρέπει να διαχωρίζει τον πίνακα A[i..j], έτσι ώστε όλα τα στοιχεία του πίνακα που είναι περιττά να βρίσκονται στις πρώτες θέσεις του πίνακα, ενώ εκείνα που είναι άρτια να βρίσκονται στις τελευταίες θέσεις του πίνακα (δηλαδή να εμφανίζονται στον πίνακα σε θέσεις μετά από όλα τα περιττά στοιχεία). Για παράδειγμα, θεωρήστε τον πίνακα A = [20, 9, 4, 6, 8, 13, 23, 11]. Μετά την εκτέλεση της Separate(A, 0, 7), θα πρέπει ο πίνακας να έχει την εξής μορφή: A = [11, 9, 23, 13, 8, 6, 4, 20]. Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να έχει χρονική πολυπλοκότητα  $O(n)$ .
- Παρουσιάστε ψευδοκώδικα για τον **αναδρομικό** αλγόριθμο Separate(). [5M]
  - Ιχνηλατίστε τον ψευδοκώδικά που παρουσιάσατε στο ερώτημα i όταν αυτός εκτελείται με είσοδο τον πίνακα A = [20, 9, 4, 6, 8, 13, 23, 11]. [3M]
  - Διατυπώστε μια αναδρομική σχέση για το χρόνο εκτέλεσης της Separate(). [4M]
  - Επιλύστε την αναδρομική σχέση που διατυπώσατε στο ερώτημα iii και μελετήστε την τάξη της χρονικής πολυπλοκότητας της Separate(). [5M]
  - Ποια είναι η χωρική πολυπλοκότητα της Separate() (δηλαδή πόση μνήμη απαιτείται για να εκτελεστεί); [5M]
- β. i) Επιλύστε τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις (με επαναληπτική αντικατάσταση).  
 Α.  $T(1) = 1, T(n) = T(n-1) + 2n$ . [3M]  
 Β.  $T(1) = T(0) = 1, T(n) = T(n/2) + 3n - 3$ . [6M]  
 Γ.  $T(1) = T(0) = 1, T(n) = 3T(n/3) + 6$ . [6M]
- ii) Αποδείξτε πως η λύση που βρήκατε για την αναδρομική σχέση που παρουσιάζεται στο β. είναι σωστή χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.
- iii) Σχεδιάστε το δένδρο αναδρομής για την αναδρομική σχέση που παρουσιάζεται στο ερώτημα Γ.