

HY240: Δομές Δεδομένων
Χειμερινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2019-20
Παναγιώτα Φατούρου

3^ο Σετ Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: Δευτέρα, 2 Δεκεμβρίου 2019

Τρόπος Παράδοσης: Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν είτε σε ηλεκτρονική μορφή χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin (δείτε οδηγίες στην ιστοσελίδα του μαθήματος), είτε στους βοηθούς του μαθήματος στο εργαστήριο των μεταπτυχιακών, την Δευτέρα, 2 Δεκεμβρίου 2019, ώρα 15:00-16:00. Ασκήσεις που παραδίδονται μετά τις 16:00 της Δευτέρας, 2/12/2019 θεωρούνται εκπρόθεσμες. Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin.

Άσκηση 1 [27 μονάδες]

- α. Θεωρήστε ένα απλά-συνδεδεμένο δυαδικό δένδρο T . Παρουσιάστε ψευδοκώδικα για μια συνάρτηση η οποία θα παίρνει ως όρισμα ένα δείκτη στη ρίζα του T και θα αποδεσμεύει όλους τους κόμβους του T (χρησιμοποιώντας την free). Μετά το πέρας της εκτέλεσης του αλγορίθμου σας, το δένδρο T θα πρέπει να είναι κενό και όλοι οι κόμβοι που είχε αρχικά θα πρέπει να έχουν αποδεσμευτεί. [14%]
- β. Θεωρήστε ένα δυαδικό δένδρο T που υλοποιεί ένα (όχι-απαραίτητα δυαδικό) διατεταγμένο δένδρο Δ . Παρουσιάστε ψευδοκώδικα για μια αναδρομική συνάρτηση η οποία θα παίρνει, ως όρισμα, ένα δείκτη στη ρίζα του T και θα εξετάζει αν όλα τα φύλλα του δένδρου Δ έχουν το ίδιο κλειδί. [13%]

Άσκηση 2 [20 μονάδες]

Θεωρήστε δύο ταξινομημένα δυαδικά δένδρα (δηλαδή δύο δένδρα δυαδικής αναζήτησης), έστω T_1 και T_2 . Ζητείται αλγόριθμος ο οποίος θα συγχωνεύει τα δύο δένδρα σε ένα σε χρόνο $O(n_1 + n_2)$, όπου n_1 και n_2 είναι το πλήθος των κόμβων του T_1 και του T_2 , αντίστοιχα. Το τελικό δένδρο θα πρέπει να έχει ύψος $O(\log(n_1 + n_2))$.

Υπόδειξη: Τοποθετήστε τα στοιχεία του T_1 σε έναν πίνακα, ο οποίος θα είναι ταξινομημένος σε αύξουσα διάταξη, σε χρόνο $O(n_1)$. Τοποθετήστε τα στοιχεία του T_2 σε έναν δεύτερο πίνακα, ο οποίος θα είναι επίσης ταξινομημένος σε αύξουσα διάταξη, σε χρόνο $O(n_2)$. Συγχωνεύστε τα στοιχεία των δύο πινάκων σε έναν τρίτο πίνακα ο οποίος θα είναι επίσης ταξινομημένος σε αύξουσα διάταξη. Η συγχώνευση θα πρέπει να πραγματοποιείται σε χρόνο $O(n_1 + n_2)$. Βάσει του τρίτου πίνακα, φτιάξτε το δένδρο T που θα περιέχει και τα στοιχεία του T_1 και εκείνα του T_2 . Το T θα πρέπει να έχει ύψος $O(\log(n_1 + n_2))$ και η δημιουργία του θα πρέπει να πραγματοποιείται σε χρόνο $O(n_1 + n_2)$.

Άσκηση 3 [24 Μονάδες]

Ένα δυαδικό μεταδιατεταγμένο (postorder) ταξινομημένο δένδρο είναι ένα δυαδικό δένδρο για το οποίο η μεταδιατεταγμένη διάσχιση δίνει τα κλειδιά που είναι αποθηκευμένα στους κόμβους του δένδρου σε αύξουσα διάταξη. Παρουσιάστε ψευδοκώδικα για την υλοποίηση των ακόλουθων λειτουργιών σε ένα μεταδιατεταγμένο ταξινομημένο δυαδικό δένδρο:

1. Εύρεση του κόμβου με κλειδί k .

[8M]

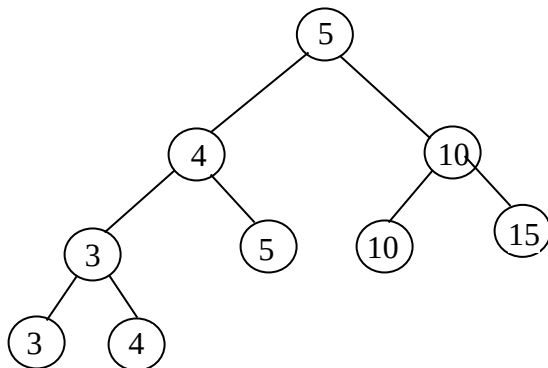
2. Εισαγωγή νέου κόμβου με κλειδί k στο δένδρο (μετά την εισαγωγή το δένδρο θα πρέπει να εξακολουθεί να είναι μεταδιατεταγμένα ταξινομημένο). Ο αλγόριθμος θα πρέπει να επιστρέφει TRUE αν η εισαγωγή πραγματοποιηθεί επιτυχώς και FALSE διαφορετικά. [8M]
 3. Διαγραφή του κόμβου με κλειδί k από το δένδρο (μετά τη διαγραφή το δένδρο θα πρέπει να εξακολουθεί να είναι μεταδιατεταγμένα ταξινομημένο). Ο αλγόριθμος θα πρέπει να επιστρέφει TRUE αν η διαγραφή πραγματοποιηθεί επιτυχώς και FALSE διαφορετικά. [8M]
- Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(h)$, όπου h είναι το ύψος του δένδρου.

Άσκηση 4 [29 Μονάδες]

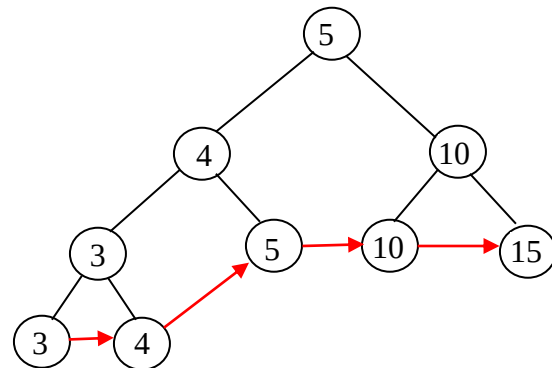
Τα φυλλοπροσανατολισμένα δένδρα δυαδικής αναζήτησης (leaf-oriented binary search trees) αποτελούν μια εναλλακτική υλοποίηση του αφηρημένου τύπου δεδομένων του λεξικού. Ορίζονται ως εξής: (α) Όλα τα κλειδιά του λεξικού αποθηκεύονται στα φύλλα του δένδρου, από αριστερά προς τα δεξιά κατά μη φθίνουσα τιμή κλειδιού, και (β) οι εσωτερικοί κόμβοι αποθηκεύουν κλειδιά (που δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε κλειδιά του λεξικού), έτσι ώστε να ισχύει η κάτωθι αμετάβλητη συνθήκη σε κάθε κόμβο v :

*Το κλειδί του αριστερού παιδιού του v είναι μικρότερο ή ίσο από αυτό του v ,
ενώ το δεξιό παιδί του v διαθέτει κλειδί μεγαλύτερο από εκείνο του v*

Παρατηρήστε ότι βάσει του ορισμού, οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν και τους δύο δείκτες μη κενούς, ενώ και οι δύο δείκτες των φύλλων είναι κενοί. Ένα παράδειγμα φυλλο-προσανατολισμένου δένδρου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Τα εμπλουτισμένα φυλλοπροσανατολισμένα δένδρα δυαδικής αναζήτησης (leaf-oriented binary search trees) περιέχουν επιπρόσθετα σε κάθε κόμβο v ένα δείκτη next που δείχνει στο επόμενο φύλλο (δηλαδή στο φύλλο που αποθηκεύει το αμέσως μεγαλύτερο κλειδί από το κλειδί του v). Ένα παράδειγμα εμπλουτισμένου φυλλο-προσανατολισμένου δένδρου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2, όπου οι next δείκτες εμφανίζονται με κόκκινο χρώμα.

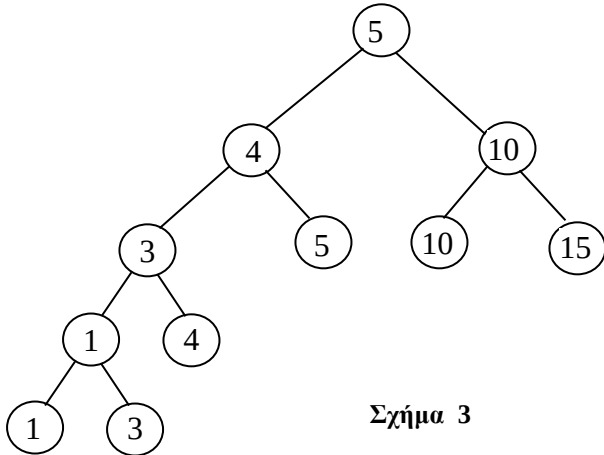
Παρουσιάστε αλγορίθμους εισαγωγής, διαγραφής και αναζήτησης σε εμπλουτισμένα φυλλο-προσανατολισμένα δένδρα δυαδικής αναζήτησης. Οι αλγόριθμοί σας θα πρέπει να εκτελούνται σε χρόνο $O(h)$, όπου h είναι το ύψος του δένδρου.

[Εισαγωγή: 12M, Διαγραφή: 12M, Αναζήτηση: 5M]

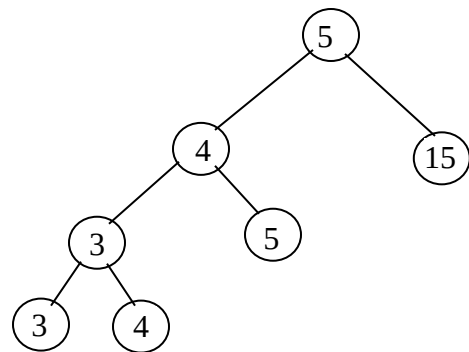
Διευκρινήσεις επί των λειτουργιών της Εισαγωγής και της Διαγραφής:

1. Για να εισάγουμε έναν νέο κόμβο, v , με κλειδί K σε ένα φυλλοπροσανατολισμένο δένδρο δυαδικής αναζήτησης, εκτελούμε αναζήτηση για να βρούμε το φύλλο, v' , το οποίο θα έπρεπε να αποτελέσει

τον γονικό κόμβο του v στο δένδρο. Ωστόσο, το κλειδί, K' , του v' πρέπει να εξακολουθήσει να εμφανίζεται σε φύλλο του δένδρου. Για να επιτευχθεί αυτό, αντικαθιστούμε τον v' από ένα δένδρο τριών κόμβων, το οποίο αποτελείται από έναν εσωτερικό κόμβο με δύο παιδιά που και τα δύο είναι φύλλα. Το αριστερό από τα δύο αυτά φύλλα καθώς και ο v έχουν κλειδί $\min\{K, K'\}$, ενώ το δεξιό φύλλο έχει κλειδί $\max\{K, K'\}$. Για παράδειγμα, το δένδρο του Σχήματος 3 είναι το δένδρο που προκύπτει μετά την εισαγωγή του κλειδιού 1 στο δένδρο του Σχήματος 1.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

2. Για να διαγράψουμε έναν κόμβο, v , από ένα φυλλοπροσανατολισμένο δένδρο δυαδικής αναζήτησης, βρίσκω τον γονικό του κόμβο, v' , καθώς επίσης και τον γονικό κόμβο του v' , έστω v'' . Για τη διαγραφή, αντικαθιστώ τον δείκτη του v'' που δείχνει στον v' , ώστε αυτός να δείχνει στον αδελφικό κόμβο του v . Για παράδειγμα, το δένδρο του Σχήματος 4 είναι το δένδρο που προκύπτει μετά τη διαγραφή του κλειδιού 10 από το δένδρο του Σχήματος 1.

Σ' ένα εμπλουτισμένο φυλλο-προσανατολισμένο δένδρο, πρέπει επιπρόσθετα να ενημερώνονται κατάλληλα και οι next δείκτες στα φύλλα κατά την εισαγωγή και τη διαγραφή.