

HY240: Δομές Δεδομένων
Χειμερινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2017-18
Παναγιώτα Φατούρου

4^η Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: 10/1/2018

Τρόπος Παράδοσης: Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν σε ηλεκτρονική μορφή χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin (δείτε οδηγίες στην ιστοσελίδα του μαθήματος). Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα turnin.

Άσκηση 1 [30 μονάδες]

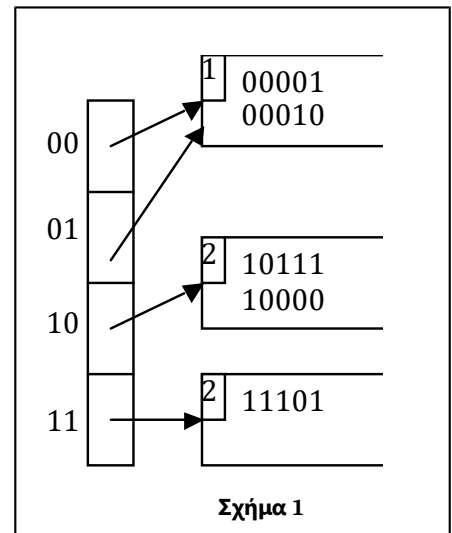
- α. Υποθέστε ότι H_1 και H_2 είναι δύο σωροί μεγέθους n_1 και n_2 , $n_1 \geq n_2$, ενώ κάθε στοιχείο του H_2 είναι μεγαλύτερο από κάθε στοιχείο του H_1 . Εξηγήστε πως μπορούμε να συνενώσουμε τους δύο σωρούς σε έναν σε χρόνο $O(n_1)$. [15M]
- β. Αποδείξτε ότι η διαγραφή ενός οποιουδήποτε στοιχείου ενός σωρού μπορεί να πραγματοποιηθεί σε χρόνο $O(\log n)$, αν έχουμε έναν δείκτη στον κόμβο (δηλαδή, σας ζητείται μια $O(\log n)$ υλοποίηση της $\text{HeapDelete}(j, h)$, η οποία διαγράφει το στοιχείο με δείκτη j από τον σωρό). [15M]

Άσκηση 2 [40 μονάδες]

- α. Ξεκινώντας με 10 σύνολα S_i , $1 \leq i \leq 10$, καθένα εκ των οποίων περιέχει μόνο ένα στοιχείο, το i , παρουσιάστε τα up-δένδρα που προκύπτουν μετά από την εκτέλεση κάθε μιας από τις ακόλουθες λειτουργίες, δεδομένου ότι χρησιμοποιείται η στρατηγική για μείωση ύψους: $A = \text{Union}(S_3, S_2)$; $B = \text{Union}(S_7, S_9)$; $C = \text{Union}(A, B)$; $D = \text{Union}(C, S_4)$; $E = \text{Union}(S_1, S_5)$; $F = \text{Union}(S_6, S_{10})$; $G = \text{Union}(F, E)$; $I = \text{Union}(G, D)$;

Παρουσιάστε τα up-δένδρα μετά την εκτέλεση των $\text{Find}(9)$ και $\text{Find}(10)$ αν χρησιμοποιηθεί η στρατηγική συμπίεσης μονοπατιού (θα πρέπει να παρουσιάσετε δύο δένδρα, αυτό που προκύπτει μετά την εκτέλεση της $\text{Find}(9)$ και αυτό που προκύπτει μετά την εκτέλεση της $\text{Find}(10)$ πάνω στο δένδρο που προέκυψε από την εκτέλεση της $\text{Find}(9)$). [8M]

- β. Εισάγεται το κλειδί με τιμή κατακερματισμού 00100 στον επεκτάσιμο πίνακα κατακερματισμού (extendible hash table) του Σχήματος 1. Διαγράψτε το κλειδί με τιμή κατακερματισμού 11101 από τον πίνακα του Σχήματος 1. Θεωρήστε ότι κάθε σελίδα-φύλλο του πίνακα χωράει 2 εγγραφές (δηλαδή υποθέστε ότι $b = 2$) και ότι χρησιμοποιείται μια στρατηγική διαγραφής σύμφωνα με την οποία θα πρέπει το directory (κατάλογος) να διατηρείται όσο το δυνατό μικρότερο. [6M]

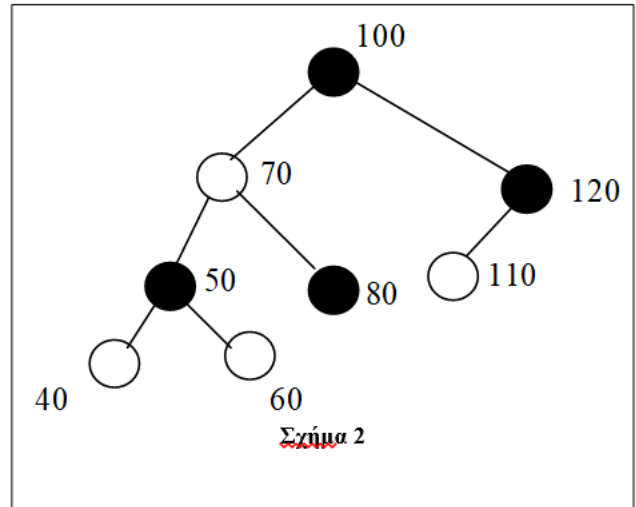


Σχήμα 1

γ. Θεωρήστε ότι το δένδρο του Σχήματος 2 είναι ένα AVL δένδρο (δηλαδή αγνοήστε το χρώμα των κόμβων). Διαγράψτε το κλειδί 120. Εισάγεται το κλειδί 10 στο AVL δένδρο του Σχήματος 2. [6M]

δ. Ένα 2-3 δένδρο αποτελείται από 7 2-κόμβους οι οποίοι έχουν τα κλειδιά 500, 300, 700, 600, 800, 200, 400. Ζωγραφίστε το δένδρο και διαγράψτε το κλειδί 500. [8M]

ε. Ένα 2-3 δένδρο αποτελείται από 13 3-κόμβους. Τα κλειδιά που υπάρχουν στο δένδρο είναι τα εξής 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52. Ζωγραφίστε το δένδρο και εισάγεται το κλειδί 25 σε αυτό. [8M]



ζ. Εισάγεται το κλειδί 45 στο κόκκινο-μαύρο δένδρο του Σχήματος 1. [4M]

Σημείωση: Στα παραπάνω ερωτήματα **πρέπει να παρουσιάσετε όλη τη διαδικασία** που ακολουθείτε προκειμένου να καταλήξετε στο τελικό δένδρο (οι περιστροφές όπου χρειάζονται θα πρέπει επίσης να περιγραφούν αναλυτικά).

Άσκηση 3 [30 μονάδες]

Έστω ότι για κάθε κόκκινο μαύρο δένδρο T διατηρούμε μια μεταβλητή bh στην οποία αποθηκεύουμε το μαύρο ύψος του δένδρου. Για παράδειγμα, το δένδρο αναπαρίσταται ως ένα struct με πεδία ένα δείκτη r στη ρίζα του δένδρου και έναν ακέραιο bh στον οποίο αποθηκεύουμε το μαύρο ύψος του δένδρου.

α. Αποδείξτε ότι το bh μπορεί να υπολογίζεται σωστά κατά την εισαγωγή ή τη διαγραφή ενός κόμβου στο T χωρίς να απαιτείται επιπλέον μνήμη και χωρίς να επηρεάζεται η χρονική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων αυτών (εισαγωγής και διαγραφής). Εξηγήστε πως μπορεί να επιτευχθεί αυτό. [10M]

β. Αποδείξτε ότι, δεδομένου του bh του δένδρου, καθώς κατεβαίνουμε από τη ρίζα προς οποιοδήποτε φύλλο, το μαύρο ύψος κάθε κόμβου του μονοπατιού που διασχίζουμε μπορεί να υπολογιστεί σε $O(1)$ χρόνο (έτσι ώστε τα μαύρα ύψη όλων των κόμβων του μονοπατιού να μπορούν να υπολογιστούν σε λογαριθμικό χρόνο). [10M]

γ. Έστω ότι το struct του κόμβου του κοκκινόμαυρου δένδρου περιέχει ένα πεδίο bh , το οποίο θα πρέπει να αποθηκεύει το μαύρο ύψος του κόμβου. Θεωρήστε ένα δένδρο στο οποίο το bh πεδίο όλων των κόμβων έχει την αρχική τιμή -1 . Παρουσιάστε αναδρομικό αλγόριθμο, ο οποίος θα χρησιμοποιεί **την προδιατεταγμένη διάσχιση** (και τη γνώση του ποιο είναι το μαύρο ύψος ολόκληρου του δένδρου) για να αποθηκεύσει το μαύρο ύψος κάθε κόμβου στο struct του κόμβου. [10M]