

Ενότητα 6: Κατακερματισμός

Ασκήσεις και Λύσεις

Άσκηση 1

Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση κατακερματισμού της διαίρεσης ως πρωτεύουσα συνάρτηση κατακερματισμού και τη συνάρτηση $h(K) = (K+3) \% m$ ως δευτερεύουσα συνάρτηση κατακερματισμού να εισαχθούν τα κλειδιά 50, 15, 37, 44, 29, 70 και 23 σε ένα πίνακα 7 θέσεων, ο οποίος είναι οργανωμένος με τη μέθοδο:

της αλυσίδας

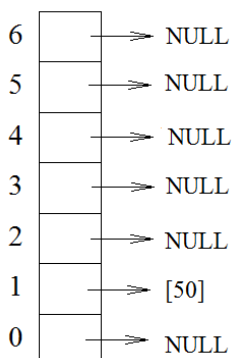
- των μικτών αλυσίδων
- των μικτών αλυσίδων με κελάρι 3^{ov} θέσεων
- του διπλού κατακερματισμού
- της γραμμικής αναζήτησης
- του ταξινομημένου κατακερματισμού με ανοιχτή διεύθυνση

$h(k) = k \% 7$ (αφού ο πίνακας είναι 7 θέσεων). Σε ποια θέση θα μπει το κάθε στοιχείο, καθορίζεται, από το υπόλοιπο της διαίρεσης της τιμής του αριθμού με το πλήθος θέσεων του πίνακα.

α. Μέθοδος της Αλυσίδας

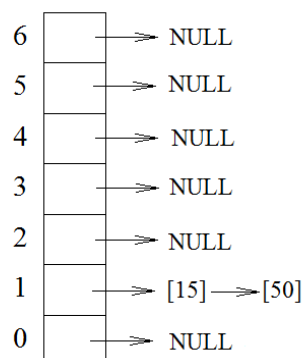
Στη μέθοδο αυτή το κάθε στοιχείο εισάγεται στη θέση που δηλώνει η συνάρτηση κατακερματισμού $h(K) = K \% 7$. Αν η θέση αυτή δεν είναι NULL τότε εισάγεται ταξινομημένα στην σωστή λίστα.

$$h(50) = 50 \% 7 = 1$$



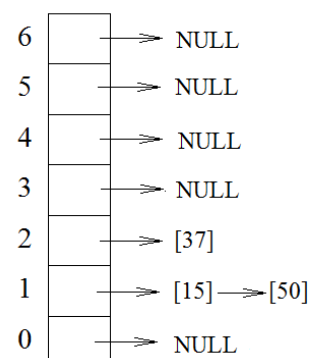
Εισαγωγή 50

$$h(15) = 15 \% 7 = 1$$



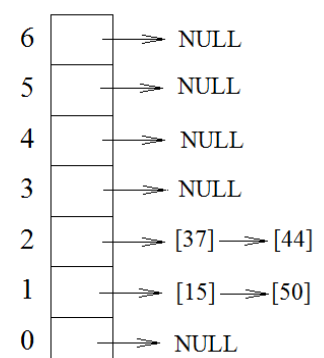
Εισαγωγή 15

$$h(37) = 37 \% 7 = 2$$



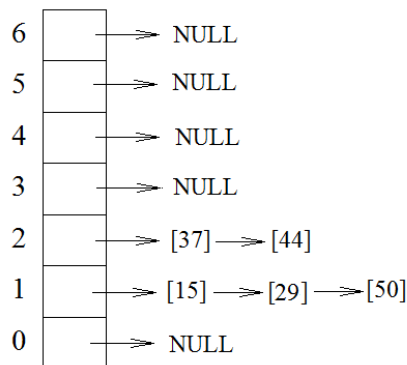
Εισαγωγή 37

$$h(44) = 44 \% 7 = 2$$



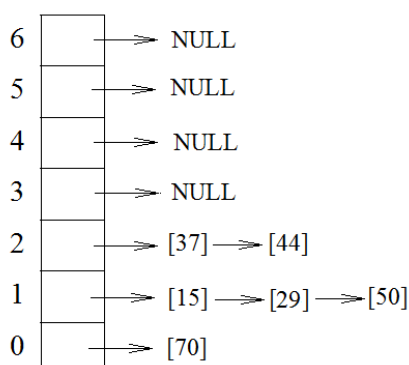
Εισαγωγή 44

$$h(29) = 29 \% 7 = 1$$



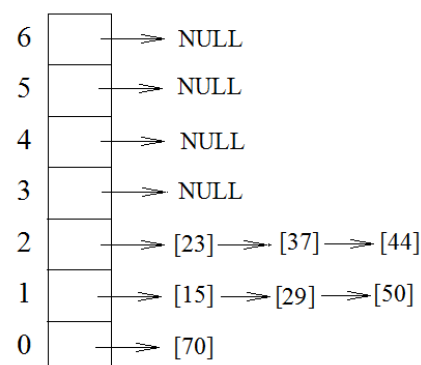
Εισαγωγή 29

$$h(70) = 70 \% 7 = 0$$



Εισαγωγή 70

$$h(23) = 23 \% 7 = 2$$



Εισαγωγή 23

β. Μέθοδος των Μικτών αλυσίδων

Ο πίνακας σε αυτή τη μέθοδο αποτελείται από δύο στήλες. Η πρώτη στήλη αποτελείται από τα δεδομένα και η δεύτερη από τους δείκτες next που χρησιμοποιούνται σε περίπτωση σύγκρουσης. Αρχικά, όλα τα πεδία next των στοιχείων είναι Λ. Η πρώτη θέση που δοκιμάζουμε καθορίζεται από την συνάρτηση κατακερματισμού $h(K) = K \% 7$. Αν η θέση αυτή είναι κατειλημμένη τότε αναζητούμε την πρώτη διαθέσιμη ξεκινώντας από την αρχή του πίνακα. Μόλις βρούμε τη θέση βάζουμε το στοιχείο εκεί και στο δείκτη που βρίσκεται στη θέση $h(K)$ αντικαθιστούμε το Λ με τη θέση που εισήχθη το στοιχείο.

$$h(50) = 50 \% 7 = 1$$

6		Λ
5		Λ
4		Λ
3		Λ
2		Λ
1	50	Λ
0		Λ

Εισαγωγή 50

$$h(15) = 15 \% 7 = 1$$

6		Λ
5		Λ
4		Λ
3		Λ
2		Λ
1	50	0
0	15	Λ

Εισαγωγή 15

$$h(37) = 37 \% 7 = 2$$

6		Λ
5		Λ
4		Λ
3		Λ
2	37	Λ
1	50	0
0	15	Λ

Εισαγωγή 37

$$h(44) = 44 \% 7 = 2$$

6		Λ
5		Λ
4		Λ
3	44	Λ
2	37	3
1	50	0
0	15	Λ

Εισαγωγή 44

$$h(29) = 29 \% 7 = 1$$

6		Λ
5		Λ
4	29	Λ
3	44	Λ
2	37	3
1	50	0
0	15	4

Εισαγωγή 29

$$h(70) = 70 \% 7 = 0$$

6		Λ
5	70	Λ
4	29	5
3	44	Λ
2	37	3
1	50	0
0	15	4

Εισαγωγή 70

$$h(23) = 23 \% 7 = 2$$

6	23	Λ
5	70	Λ
4	29	5
3	44	6
2	37	3
1	50	0
0	15	4

Εισαγωγή 23

γ. Μέθοδος μικτών Αλυσίδων, με κελάρι 3^{ov} θέσεων

Ακολουθούμε όμοια την προηγούμενη μέθοδο, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε τις πρώτες 3 θέσεις ως κελάρι για να αποθηκεύουμε στοιχεία όταν έχουμε συγκρούσεις και ξεκινάμε τις εισαγωγές από τη θέση 3. Η συνάρτηση κατακερματισμού που προκύπτει είναι $h(k) = (k \% 7) \% 4 + 3$

$$h(50) = (50 \% 7) \% 4 + 3 = 4$$

6		Λ
5		Λ
4	50	Λ
3		Λ
2		Λ
1		Λ
0		Λ

Εισαγωγή 50

$$h(15) = (15 \% 7) \% 4 + 3 = 4$$

6		Λ
5		Λ
4	50	0
3		Λ
2		Λ
1		Λ
0	15	Λ

Εισαγωγή 15

$$h(37) = (37 \% 7) \% 4 + 3 = 5$$

6		Λ
5	37	Λ
4	50	0
3		Λ
2		Λ
1		Λ
0	15	Λ

Εισαγωγή 37

$$h(44) = (44 \% 7) \% 4 + 3 = 5$$

6		Λ
5	37	1
4	50	0
3		Λ
2		Λ
1	44	Λ
0	15	Λ

Εισαγωγή 44

$$h(29) = (29 \% 7) \% 4 + 3 = 4$$

6		Λ
5	37	1
4	50	0
3		Λ
2	29	Λ
1	44	Λ
0	15	2

Εισαγωγή 29

$$h(70) = (70 \% 7) \% 4 + 3 = 3$$

6		Λ
5	37	1
4	50	0
3	70	Λ
2	29	Λ
1	44	Λ
0	15	2

Εισαγωγή 70

$$h(23) = (23 \% 7) \% 4 + 3 = 5$$

6	23	Λ
5	37	1
4	50	0
3	70	Λ
2	29	Λ
1	44	6
0	15	2

Εισαγωγή 23

δ. Κατακερματισμός με Ανοιχτή Διευθυνσιοδότηση – Διπλός Κατακερματισμός

Η πρώτη θέση που δοκιμάζουμε καθορίζετε από τη πρωτεύουσα συνάρτηση κατακερματισμού. Κάθε κλειδί της αλυσίδας εισάγεται στη κατάλληλη θέση ανάλογα με το αποτέλεσμα της πρωταρχικής συνάρτησης κατακερματισμού $h_1(k) = k \% 7$. Αν η θέση αυτή είναι κατειλημμένη, τότε εξετάζουμε $h_2(k)$ θέσεις μετά από την $h_1(k)$ θέση. Αν η θέση αυτή είναι κατειλημμένη συνεχίζουμε με βήμα $h_2(k)$ μέχρι να βρούμε κενή θέση.

Εισαγωγή 50

$$h_1(50) = 50 \% 7 = 1$$

$$h(50) = 1$$

6	
5	
4	
3	
2	
1	50
0	

Εισαγωγή 15

$$h_1(15) = 15 \% 7 = 1$$

$$h_2(15) = (15+3) \% 7 = 4$$

$$h(50) = 4+1 = 5$$

6	
5	15
4	
3	
2	
1	50
0	

Εισαγωγή 37

$$h_1(37) = 37 \% 7 = 2$$

$$h(37) = 2$$

6	
5	15
4	
3	
2	37
1	50
0	

Εισαγωγή 44

$$h_1(44) = 44 \% 7 = 2$$

$$h(44) = 2$$

6	
5	15
4	44
3	
2	37
1	50
0	

Εισαγωγή 29

$$h_1(29) = 29 \% 7 = 1$$

$$h_2(29) = (29+3) \% 7 = 4$$

$$h(29) = 4+1\%7 = 5$$

6	29
5	15
4	44
3	
2	37
1	50
0	

Εισαγωγή 70

$$h_1(70) = 70 \% 7 = 0$$

$$h(70) = 0$$

6	29
5	15
4	44
3	
2	37
1	50
0	70

Εισαγωγή 23

$$h_1(23) = 23 \% 7 = 2$$

$$h_2(23) = (23+3) \% 7 = 5$$

6	29
5	15
4	44
3	23
2	37
1	50
0	70

ε. Κατακερματισμός με Ανοιχτή Διευθυνσιοδότηση – Γραμμική αναζήτηση

Η πρώτη θέση που δοκιμάζουμε καθορίζετε από τη συνάρτηση κατακερματισμού $h(k) = k \% 7$. Αν η θέση αυτή είναι κατειλημμένη, τότε αναζητούμε κυκλικά στον πίνακα την πρώτη ελεύθερη θέση ξεκινώντας από την $h(k)$ θέση.

Εισαγωγή 50

$$h(50) = 50 \% 7 = 1$$

6	
5	
4	
3	
2	
1	50
0	

Εισαγωγή 15

$$h(15) = 15 \% 7 = 1$$

Επόμενη ελεύθερη = 2

6	
5	
4	
3	
2	15
1	50
0	

Εισαγωγή 37

$$h(37) = 37 \% 7 = 2$$

Επόμενη ελεύθερη = 3

6	
5	
4	
3	37
2	15
1	50
0	

Εισαγωγή 44

$$h(44) = 44 \% 7 = 2$$

Επόμενη ελεύθερη = 4

6	
5	
4	44
3	37
2	15
1	50
0	

Εισαγωγή 29

$$h(29) = 29 \% 7 = 1$$

Επόμενη ελεύθερη = 5

6	
5	29
4	44
3	37
2	15
1	50
0	

Εισαγωγή 70

$$h(70) = 70 \% 7 = 0$$

6	
5	29
4	44
3	37
2	15
1	50
0	70

Εισαγωγή 23

$$h(23) = 23 \% 7 = 2$$

Επόμενη ελεύθερη = 6

6	23
5	29
4	44
3	37
2	15
1	50
0	70

στ. Ταξινομημένος Κατακερματισμός με Ανοιχτή Διευθυνσιοδότηση

Η πρώτη θέση που δοκιμάζουμε καθορίζετε από την πρωτεύουσα συνάρτηση κατακερματισμού $h_1(k) = k \% 7$. Αν η θέση αυτή είναι κατειλημμένη τότε εξετάζουμε αν το στοιχείο που βρίσκεται σε αυτή τη θέση είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο. Αν είναι μεγαλύτερο τότε αποθηκεύουμε το μικρότερο στοιχείο εκεί και προχωράμε με βήμα $h_2(k)$ στον πίνακα. Αν είναι μικρότερο, τότε συνεχίζουμε με βήμα $h_2(k)$ για να βρούμε επόμενη θέση, όπου θα είναι ή κενή ή θα βρίσκεται κάποιο άλλο στοιχείο εκεί. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε στοιχείο στην αλυσίδα μέχρι να βρεθεί μια κενή θέση στην οποία θα γίνει η τελευταία μετατόπιση. Τα κλειδιά διατηρούνται ταξινομημένα σε κάθε αλυσίδα.

Εισαγωγή 50

$$h(50) = 50 \% 7 = 1$$

6	
5	
4	
3	
2	
1	50
0	

Εισαγωγή 15

$$h(15) = 15 \% 7 = 1$$

6		
5		50
4		
3		
2		
1	50	15
0		

15 < 50

Εισαγωγή 37

$$h(37) = 37 \% 7 = 2$$

6	
5	50
4	
3	
2	37
1	15
0	

Εισαγωγή 44

$$h(44) = 44 \% 7 = 2$$

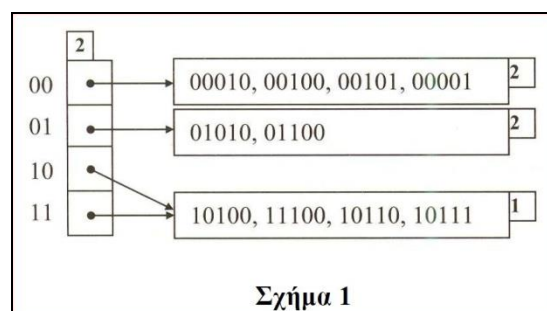
6		
5	50	50
4		
3		
2	37	37
1	15	15
0		44

37 < 44

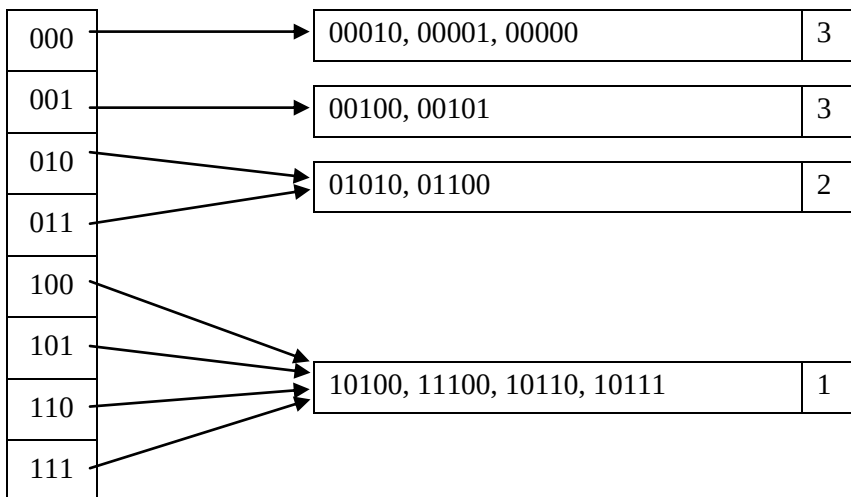
Εισαγωγή 29			Εισαγωγή 70			Εισαγωγή 23		
$h(29) = 29 \% 7 = 1$			$h(70) = 70 \% 7 = 0$			$h(23) = 23 \% 7 = 2$		
6		50	6	50		6	50	50
5	50	29	5	29		5	29	29
4			4			4		70
3			3	70		3	70	44
2	37	37	2	37		2	37	23
1	15	15	1	15		1	15	15
0	44	44	0	44	70>44	0	44	37

Άσκηση 2

α. Έστω ότι τα κλειδιά με τιμές κατακερματισμού 00000, 10101 και 11111 εισάγονται διαδοχικά (το ένα μετά το άλλο) στον επεκτάσιμο πίνακα κατακερματισμού του Σχήματος 1. Θεωρήστε ότι για αυτόν τον πίνακα ισχύει ότι $b=4$. Παρουσιάστε τους πίνακες κατακερματισμού που προκύπτουν μετά από κάθε εισαγωγή (καθώς και τη διαδικασία που οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση).

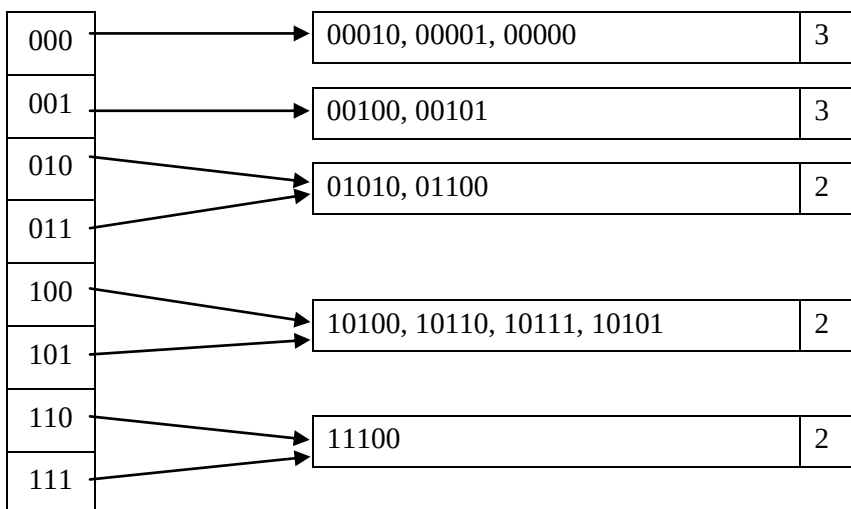


Εισαγωγή 00000: το κλειδί αυτό θα πρέπει να εισαχθεί στη πρώτη γραμμή του πίνακα, γιατί τα δυο πρώτα στοιχεία του είναι τα 00. Όμως εκεί υπάρχουν τέσσερα κλειδιά και επειδή $b=4$, δεν έχει άλλο χώρο. Συνεπώς είναι απαραίτητη η αύξηση του βάθους του πίνακα κατακερματισμού, από δύο σε τρία. Αυτό σημαίνει ότι πλέον θα παίζουν ρόλο τα **τρία** πρώτα ψηφία των κλειδιών αυτών. Άρα, ο παραπάνω πίνακας θα γίνει τώρα ως εξής:



Να σημειώσουμε, βέβαια, ότι τα κλειδιά που ξεκινάνε από **1** είναι τέσσερα, επομένως, μπορούν όλα να μπουν σε μια γραμμή πίνακα.

Εισαγωγή 10101: με βάση το προηγούμενο, το κλειδί αυτό ξεκινάει με τη μονάδα, άρα δεν υπάρχει χώρος να εισαχθεί στη τελευταία γραμμή, όπου κανονικά είναι η θέση του, οπότε γίνεται διασπάται η τελευταία γραμμή. Όσα κλειδιά ξεκινάνε από **10** (δηλαδή το δεύτερο ψηφίο να είναι 0, δεδομένου το πρώτο ότι είναι ένα) εισάγονται στη τέταρτη γραμμή και όσα ξεκινάνε από **11** εισάγονται στη τελευταία. Άρα το κλειδί **10101**, θα εισαχθεί όπως φαίνεται παρακάτω:



Εισαγωγή 11111: το κλειδί αυτό, εφόσον ξεκινάει με **11** θα εισαχθεί στη τελευταία γραμμή του πίνακα και αφού δεν έχουν συμπληρωθεί οι θέσεις, μπορεί να εισαχθεί κανονικά χωρίς κάποια άλλη αλλαγή - διάσπαση σχετικά με το βάθος του κάδου.

000	→	00010, 00001, 00000	3
001	→	00100, 00101	3
010	→	01010, 01100	2
011	→		
100	→	10100, 10110, 10111, 10101	2
101	→		
110	→	11100, 11111	2
111	→		

β. Παρουσιάστε τους πίνακες κατακερματισμού (καθώς και τη διαδικασία που οδηγεί στο αποτέλεσμα) που προκύπτουν κατά τη διαδοχική διαγραφή των κλειδιών με τιμές κατακερματισμού 00101, 00010, 01010, 00100, 10111 και 11100 από τον επεκτάσιμο πίνακα κατακερματισμού που προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα μετά τις εισαγωγές.

Διαγραφή 00101: το κλειδί αυτό βρίσκεται στο δεύτερο κάδο, το διαγράφουμε και παρατηρούμε ότι μπορούμε να μεταθέσουμε το κλειδί **00100** στον από πάνω κάδο, επομένως θα χρειαζόμαστε μόνο 2 ψηφία των κλειδιών για να τα αναζητήσουμε.

000	→	00010, 00001, 00000, 00100	2
001	→		
010	→	01010, 01100	2
011	→		
100	→	10100, 10110, 10111, 10101	2
101	→		
110	→	11100, 11111	2
111	→		

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας μπορεί να συρρικνωθεί αφού μετά τη διαγραφή του 00101 τα στοιχεία χωράνε σε μικρότερο πίνακα. Άρα ο πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:

00	→	00010, 00001, 00000, 00100	2
01	→	01010, 01100	2
10	→	10100, 10110, 10111, 10101	2
11	→	11100, 11111	2

Διαγραφή 00010: το κλειδί αυτό διαγράφεται χωρίς να παρατηρείται κάποια αλλαγή.

00	→	00001, 00000, 00100	2
01	→	01010, 01100	2
10	→	10100, 10110, 10111, 10101	2
11	→	11100, 11111	2

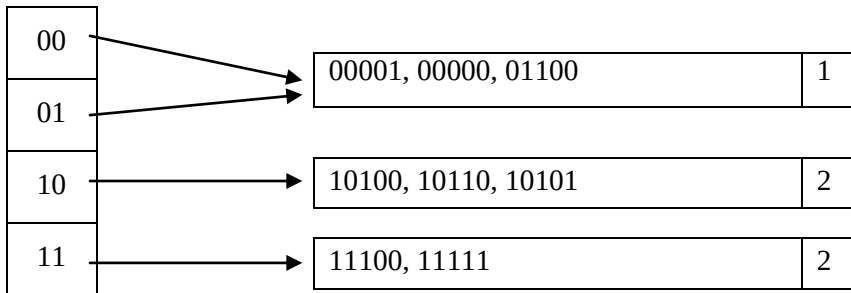
Διαγραφή 01010: με τη διαγραφή του κλειδιού αυτού απομένουν 4 στοιχεία που ξεκινάνε από 0 συνεπώς χωράνε σε ένα κάδο μόνο.

00	→	00001, 00000, 00100, 01100	1
01	→		
10	→	10100, 10110, 10111, 10101	2
11	→	11100, 11111	2

Διαγραφή 00100: το κλειδί αυτό διαγράφεται χωρίς να παρατηρείται κάποια αλλαγή.

00	→	00001, 00000, 01100	1
01	→		
10	→	10100, 10110, 10111, 10101	2
11	→	11100, 11111	2

Διαγραφή 10111: το κλειδί αυτό διαγράφεται χωρίς να παρατηρείται κάποια αλλαγή.



Διαγραφή 11100: αφού ο τρίτος κάδος χωράει μετά τη διαγραφή του 10111 το στοιχείο 11111, μπορεί να μεταφερθεί το 11111 εκεί. Οι διαγραφές φαίνονται παρακάτω:

