

HY240: Δομές Δεδομένων
Εαρινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2013-14
Παναγιώτα Φατούρου

1^η Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: Τετάρτη, 30 Οκτωβρίου 2013

Τρόπος Παράδοσης: Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν είτε σε ηλεκτρονική μορφή χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα submit (δείτε οδηγίες στην ιστοσελίδα του μαθήματος), είτε στους βοηθούς του μαθήματος, την Τετάρτη, 30 Οκτωβρίου 2013, ώρα 12:00-13:00. Ασκήσεις που παραδίδονται μετά τις 13:00 της Τετάρτης, 30/10/2013 θεωρούνται εκπρόθεσμες. Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα submit. Εναλλακτικά, εκπρόθεσμες ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν στη διδάσκουσα ή να σταλούν στο hy240a@csd.uoc.gr (σε μορφή pdf) μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου.

Άσκηση 1 [20 μονάδες]

α. Έστω $T_1(n)$ το συνολικό πλήθος των φορών που εκτελείται η εντολή $x = x + 4$ στον παρακάτω αλγόριθμο. Υπολογίστε το $T_1(n)$. Τι τάξης είναι και γιατί; Υποθέστε πως το n είναι πολλαπλάσιο του 4.

Procedure HowManyPrimitiveInstructions1(integer n) { [10M]

```
    int i, j, x = 0;
    for (i=0; i <= n; i = i + 4) {
        for (j = i+4; j <= 2n; j++)
            x = x+4;
    }
}
```

β. Έστω $T_2(n)$ το συνολικό πλήθος των φορών που εκτελείται η εντολή $x = x - 2i$ στον παρακάτω αλγόριθμο. Υπολογίστε το $T_2(n)$. Τι τάξης είναι και γιατί; Υποθέστε πως το n είναι πολλαπλάσιο του 4.

Procedure HowManyPrimitiveInstructions2 (integer n) { [10M]

```
    int i, x;
    for (i = 1; i <= 4n; i = i + 1) {
        x = n;
        while (x > 0)
            x = x - 2i;
    }
}
```

Σημείωση: Το $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ ονομάζεται αρμονικός αριθμός και είναι γνωστό ότι $H_n = O(\ln n)$.

Άσκηση 2 [35 μονάδες]

α. Έστω $p(n)$ πολυώνυμο βαθμού c . Ναδειχθεί ότι $p(n) = O(n^c)$. [11M]

β. Για κάθε συνάρτηση $f(n)$ παρακάτω, βρείτε την απλούστερη συνάρτηση $g(n)$ τ.ω. $f(n) = \Theta(g(n))$. [12M]

i. $f(n) = (n^4 + n^2 \log n)(\log^2 n + 1)$

ii. $f(n) = \log(n^8 + 1) + \log 10^5$

iii. $f(n) = n^5(n^2 \log^3 n + \sqrt{n} \log n)$

γ. Βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς: [12M]

i. $n \log \log n = O(n \log^2 n)$

ii. $n \log(\sqrt[3]{n}) = \Theta(n \log n)$

iii. $2^5 n = \Theta(n^2)$

Άσκηση 3 [25 μονάδες]

α. Δίνεται ο ακόλουθος αναδρομικός ορισμός για το $n!$:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{αν } n=0 \\ n * (n-1)! & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

i. Παρουσιάστε έναν αναδρομικό αλγόριθμο $\text{Factorial}(n)$, ο οποίος θα υπολογίζει το $n!$, όπου n είναι ο ακέραιος αριθμός που ο αλγόριθμος δέχεται ως όρισμα. [5M]

ii. Διατυπώστε μια αναδρομική σχέση για το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου $\text{Factorial}()$. [5M]

iii. Επιλύστε την αναδρομική σχέση που προτείνατε στο ερώτημα ii. και μελετήστε (βάσει των συμβολισμών O , Ω , Θ) την τάξη της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου $\text{Factorial}()$. [10M]

iv. Ποια είναι η χωρική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου (δηλαδή πόση μνήμη απαιτείται για να εκτελεστεί ο αλγόριθμος); [5M]

Άσκηση 4 [20 μονάδες]

Επιλύστε τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις (με επαναληπτική αντικατάσταση) και στη συνέχεια αποδείξτε πως οι λύσεις που βρήκατε είναι σωστές χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή:

α. $T(1) = 1$, $T(n) = T(n-1) + 3n - 3$. [10M]

β. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n/2) + 2n - 1$. [10M]