

HY240: Δομές Δεδομένων

Χειμερινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2011-12

Παναγιώτα Φατούρου

1^ο Σετ Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: Δευτέρα, 15 Οκτωβρίου 2012

Τρόπος Παράδοσης: Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν είτε σε ηλεκτρονική μορφή χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα submit (δείτε οδηγίες στην ιστοσελίδα του μαθήματος), είτε στους βοηθούς του μαθήματος στο εργαστήριο των μεταπτυχιακών στο υπόγειο των λευκών κτιρίων, τη Δευτέρα, 15 Οκτωβρίου 2012, ώρα 10:00-11:00. Ασκήσεις που παραδίδονται μετά τις 11:00 της Δευτέρας, 15/10/2011 θεωρούνται εκπρόθεσμες. Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα submit. Εναλλακτικά, εκπρόθεσμες ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν στη διδάσκουσα του μαθήματος ή να σταλούν στο hy240a@csd.uoc.gr μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Παραδίδουμε τις ασκήσεις στο βοηθό του μαθήματος ή στη διδάσκουσα ή χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα submit. Δεν τοποθετούμε τις ασκήσεις σε κουτιά που βρίσκονται στο υπόγειο των λευκών κτιρίων (ακόμη και αν σε αυτά αναγράφονται πληροφορίες που φαίνονται σχετικές με το μάθημα και την τρέχουσα σειρά ασκήσεων), αφού αυτό δεν εξασφαλίζει την ασφάλεια τους. Ασκήσεις που θα βρεθούν σε κουτιά δεν θα γίνουν δεκτές.

Άσκηση 1 [50 μονάδες]

α. Έστω $f(n)$ και $g(n)$ ασυμπτωτικά θετικές συναρτήσεις. Αποδείξτε ή καταρρίψτε κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις.

- $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$. [5%]
- $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $g(n) = O(f(n))$. [5%]
- Αν $f_1(n) = O(g_1(n))$ και $f_2(n) = O(g_2(n))$ τότε και $(f_1 f_2)(n) = O((g_1 g_2)(n))$, όπου για οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις f_1, f_2 ισχύει πως $(f_1 f_2)(n) = f_1(n) * f_2(n)$ (η $f_1 f_2$ είναι το γινόμενο της f_1 με την f_2). [5%]

Υπόδειξη: Παρουσιάστε αντιπαράδειγμα αν η πρόταση δεν ισχύει, ή απόδειξη στην αντίθετη περίπτωση.

β. Διατάξτε τις ακόλουθες συναρτήσεις με βάση τον αυξητικό τους χαρακτήρα, δηλαδή βρείτε μια διάταξη $g_1, \dots, g_{15}$ των συναρτήσεων η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, $g_3 = \Omega(g_4)$, $g_4 = \Omega(g_5)$, $\dots$, $g_{14} = \Omega(g_{15})$. Διαμερίστε τη λίστα που θα προκύψει σε κλάσεις ισοδυναμίας τ.ω., οι $f(n)$ και $g(n)$ να ανήκουν στην ίδια τάξη αν και μόνο αν $f(n) = \Theta(g(n))$. Θεωρήστε πως η βάση όλων των λογαρίθμων που παρουσιάζονται στη συνέχεια είναι το 2. [15%]

$\sqrt{2}^{\log n}$	n^2	$n!$	$2^{\log n}$	$(3/2)^n$
n^3	$\log^2 n$	$4^{\log n}$	$n \log^2 n$	$n \log n$
$\log(n^{\log n})$	$\log \log n$	n	$n^{1/2}$	$n 2^{\log n}$

γ. Έστω $T_1(n)$ και $T_2(n)$ το πλήθος των φορών που εκτελείται η εντολή $x = x+1$ στους παρακάτω αλγόριθμους, αντίστοιχα. Υπολογίστε τα $T_1(n)$ και $T_2(n)$. Εξηγήστε τι τάξης είναι και γιατί. [20%]

- ```

procedure FindMyComplexity1(int n) {
 for j = 1 to n do

```

```

 for k = $n^{3/2}$ down to j do
 for m = 1 to $2 * \log n$ do $x = x + 1$;
 }

```

```

ii. procedure FindMyComplexity2(int n) {
 for j = n to ($n^2 + n$) do
 for k = 2^{n-1} to 2^n do
 for m = 1 to 10 do $x = x + 1$;
 }

```

## Άσκηση 2 [20 μονάδες]

α. Δείξτε και με τις δύο μεθόδους (μέθοδος εικασίας και μέθοδος επαναληπτικής αντικατάστασης) που έχετε διδαχθεί στο μάθημα πως η λύση της αναδρομικής σχέσης  $T(1) = 3$  και  $T(n) = 2T(n/2) + 3n + 5$  είναι  $O(n \log n)$ .

β. Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ ,  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2$ .

**Υπόδειξη:** Δοκιμάστε να ισχυροποιήσετε την επαγωγική υπόθεση αφαιρώντας τον παράγοντα  $1/n$  από το δεύτερο μέλος της ανισότητας.

## Άσκηση 3 [30 μονάδες]

Η InsertionSort() μπορεί να εκφραστεί ως αναδρομική διαδικασία με τον ακόλουθο τρόπο. Για να ταξινομήσουμε τον πίνακα  $A[1..n]$ , ταξινομούμε αναδρομικά τον υποπίνακα  $A[1..n-1]$  και στη συνέχεια ενθέτουμε το στοιχείο  $A[n]$  στον ταξινομημένο υποπίνακα  $A[1..n-1]$ .

α. Παρουσιάστε ψευδοκώδικα για την αναδρομική αυτή έκδοση της InsertionSort().

β. Διατυπώστε μια αναδρομική σχέση για το χρόνο εκτέλεσης της αναδρομικής αυτής έκδοσης της InsertionSort().

γ. Επιλύστε την αναδρομική σχέση που προτείνετε στο ερώτημα β. και μελετήστε (βάσει των συμβολισμών  $O$  και  $\Omega$ ) την τάξη της πολυπλοκότητας της αναδρομικής έκδοσης της InsertionSort.

δ. Ποια είναι η χωρική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου (δηλαδή πόση μνήμη απαιτείται για να εκτελεστεί ο αλγόριθμος);