Ενότητα 9
Ταξινόμηση

Ταξινόμηση

Θεωρούμε έναν πίνακα $A[0..n-1]$ με n στοιχεία στα οποία έχει ορισθεί μια γραμμική διάταξη, δηλαδή $\forall$ ζεύγος στοιχείων x,y του A, είτε $x < y$, ή $x > y$ ή $x = y$.

Η **διαδικασία ταξινόμησης** του A συνίσταται στην αναδιάταξη των στοιχείων του έτσι ώστε μετά το πέρας της διαδικασίας αυτής να ισχύει $A[0] \leq A[1] \leq \ldots \leq A[n-1]$.

Ταξινόμηση με Χρήση Ουρών Προτεραιότητας
Δεδομένου ότι μια βιβλιοθήκη παρέχει ουρές προτεραιότητας, ζητείται αλγόριθμος που να ταξινομεί τα n στοιχεία του πίνακα A.

Αλγόριθμος Ταξινόμησης με Χρήση Ουράς Προτεραιότητας

```
MakeEmptySet(S);
for (j = 0; j < n; j++)
      εισαγωγή του στοιχείου A[j] στην ουρά προτεραιότητας S;
for (j = 0; j < n; j++)
          Print(DeleteMin(S));
```

Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου αυτού?

- Η πολυπλοκότητα εξαρτάται από την πολυπλοκότητα των λειτουργιών Insert() και DeleteMin() της ουράς προτεραιότητας.
- Αν η ουρά προτεραιότητας υλοποιείται με τη χρήση ενός σωρού, τότε η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n \log n)$.

Ταξινόμηση χρησιμοποιώντας άλλες Δομές Δεδομένων

Αλγόριθμος Ταξινόμησης με Χρήση Ταξινομημένων Δένδρων

```
MakeEmptyBinarySearchTree(T);
for (j = 0; j < n; j++)
    BinarySearchTreeInsert(T, A[j]);
Inorder(T) // με τη Visit() να εκτελεί μια εκτύπωση του κλειδιού του εκάστοτε κόμβου
```

Χρονική Πολυπλοκότητα

- Η χρονική πολυπλοκότητα του παραπάνω αλγορίθμου είναι $O(nh)$, όπου h το ύψος του ταξινομημένου δένδρου μετά από τις n εισαγωγές.
- Αν το ταξινομημένο δένδρο είναι AVL, (2-3) δένδρο ή κοκκινόμαυρο δένδρο τότε η χρονική πολυπλοκότητα του παραπάνω αλγορίθμου είναι $O(n\log n)$ (αφού $h = O(\log n)$).

Χωρική Πολυπλκότητα

☹ Τα n στοιχεία που είναι αποθηκευμένα στον πίνακα A απαιτείται να αποθηκευτούν εκ νέου σε μια νέα δομή.

☹ Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση χρήσης ουράς προτεραιότητας.

☹ Αυτό προκαλεί σπατάλη μνήμης!

Ταξινόμηση - Ο Αλγόριθμος InsertionSort

Πρόβλημα

Είσοδος

Μια ακολουθία από n αριθμούς $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Έξοδος (output):

Μια μετάθεση (αναδιάταξη) $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \rangle$ της ακολουθίας εισόδου έτσι ώστε:

$$a'_1 \le a'_2 \le \ldots \le a'_n$$

Πως λειτουργεί ο αλγόριθμος αν A = <5,2,4,6,1,3>;

Ο αλγόριθμος InsertionSort() και η πολυπλοκότητά του έχουν συζητηθεί αναλυτικά στην Ενότητα 1 του μαθήματος.

```
Algorithm InsertionSort (A[1..n]) {
// Είσοδος: ένας μη-ταξινομημένος
   πίνακας A ακεραίων αριθμών
// Έξοδος: ο πίνακας A με τα στοιχεία
   του σε αύξουσα διάταξη
   int key, i, j;
   for (j = 2; j ≤ n; j++) {
        key = A[j];
        i = j-1;
        while (i > 0 && A[i] > key) {
             A[i+1] = A[i];
             i = i-1;
        }
        A[i+1] = key;
   }
   return A;
}
```

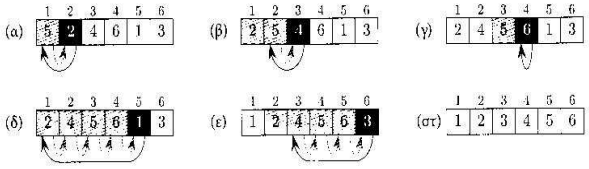
Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος InsertionSort()

```
Algorithm InsertionSort (A[1..n]) {
    int key, i, j;
    for (j = 2; j ≤ n; j++) {
        key = A[j];
        i = j-1;
        while (i > 0 && A[i] > key) {
            A[i+1] = A[i];
            i = i-1;
        }
        A[i+1] = key;
    }
    return A;
}
```

Βασική Ιδέα

Επαναληπτικά, επιλέγεται το επόμενο στοιχείο από το μη-ταξινομημένο κομμάτι A[j..n-1] του πίνακα και τοποθετείται στην κατάλληλη θέση του ταξινομημένου κομματιού A[0..j-1] του πίνακα.

Πως λειτουργεί ο αλγόριθμος αν
A = <5,2,4,6,1,3>;



Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος SelectionSort()

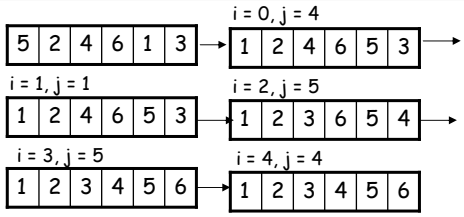
Βασική Ιδέα

Επαναληπτική αναζήτηση, στο μη-ταξινομημένο κομμάτι του πίνακα A, του στοιχείου εκείνου που θα αποτελέσει το επόμενο στοιχείο στο ταξινομημένο κομμάτι του πίνακα (το μέγεθος του ταξινομημένου κομματιού του πίνακα αυξάνει κατά ένα μετά από κάθε επανάληψη).

```
Procedure SelectionSort(table A[0..n-1]) {
// sort A by repeatedly selecting the smallest element
// from the unsorted part

  for (i = 0; i < n-1; i++) {
      j = i;
      for (k = i+1; k < n; k++)
          if (A[k] < A[j]) j = k;
      swap(A[i], A[j]);
  }
}
```

Πως λειτουργεί ο αλγόριθμος αν
A = <5,2,4,6,1,3>;



Άσκηση για το σπίτι

Αποδείξτε ότι η χρονική πολυπλοκότητα της SelectionSort() είναι $\Theta(n^2)$.

Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος HeapSort()

Βασικές Ιδέες

Αποδοτικότερη έκδοση του SelectionSort(), στην οποία το μη-ταξινομημένο κομμάτι του A διατηρείται ως ένας σωρός που το ελάχιστο στοιχείο του βρίσκεται στη θέση A[n-1] του πίνακα, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι αποθηκευμένα με την κατάλληλη σειρά σε φθίνουσες θέσεις του A ξεκινώντας από την A[n-2].

Υποθέτουμε ότι αρχικά τα στοιχεία που είναι αποθηκευμένα στον πίνακα έχουν την ιδιότητα της μερικής ταξινόμησης (αυτό επιτυγχάνεται με κλήση μιας διαδικασίας που ονομάζεται InitializeHeap()).

Διατρέχουμε όλα τα στοιχεία του A και για κάθε ένα από αυτά το ανταλλάσουμε με το στοιχείο A[n-1] (δηλαδή το ελάχιστο του σωρού) και εκτελούμε μια διαδικασία, που ονομάζεται Heapify(), η οποία επαναφέρει την ιδιότητα της μερικής ταξινόμησης του σωρού (εφαρμόζοντας τις τεχνικές που συζητήθηκαν στην Ενότητα 8).

```
Procedure HeapSort( table A[0..n-1]) {
   InitializeHeap(A);
   // Η InitializeHeap() αναλαμβάνει τη
   // μερική ταξινόμηση του αρχικού
   //πίνακα ώστε αυτός να μετατραπεί
   // σε σωρό

   for (i = 0; i < n-1; i++) {
      swap(A[i], A[n-1]);
      // επαναληπτική αποθήκευση του
      // μικρότερου στοιχείου του
      // σωρού στη θέση i του πίνακα

      Heapify(A[i+1…n-1]);
      // επαναφορά της μερικής
      // διάταξης του σωρού που μπορεί
      // να έχει καταστραφεί στη ρίζα
   }
}
```


Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος HeapSort()

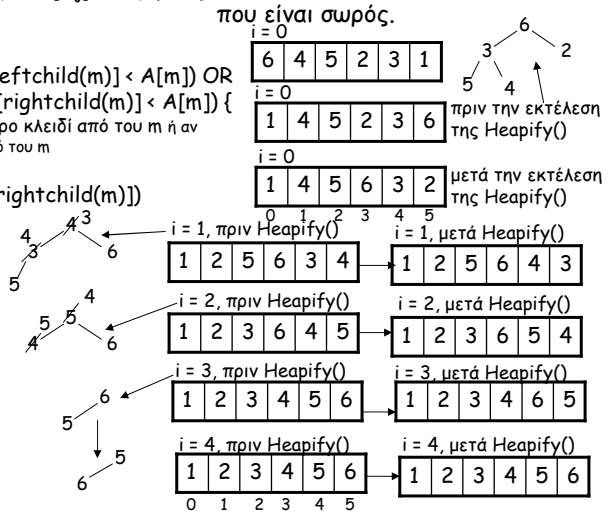
```
procedure Heapify(table A[i..j]) {
// Αρχικά, το κομμάτι A[i..j-1] είναι μερικώς ταξινομημένο, ενώ
μετά την εκτέλεση της Heapify() το κομμάτι A[i..j] είναι μερικώς
ταξινομημένο

   m = j;
   while ((leftchild(m) ≥ i AND A[leftchild(m)] < A[m]) OR
          (rightchild(m) ≥ i  AND A[rightchild(m)] < A[m]) {
// αν υπάρχει αριστερό παιδί με μικρότερο κλειδί από του m ή αν
// υπάρχει δεξιό παιδί με μικρότερο κλειδί από του m
         if (rightchild(m) ≥ i ) {
               if (A[leftchild(m)] < A[rightchild(m)])
                     p = leftchild(m)
               else p = rightchild(m);
         }
         else p = i;
         swap(A[m], A[p]);
         m = p;
   }
}
```

Στον παραπάνω κώδικα ισχύει ότι:

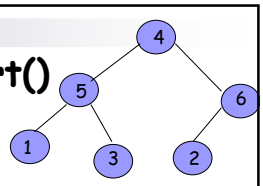
- leftchild(m) = 2m-n
- rightchild(m) = 2m-n-1

Παράδειγμα Εκτέλεσης της HeapSort(A) όπου A = [6,4,5,2,3,1] που είναι σωρός.



Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος HeapSort()

```
Procedure InitializeHeap(table A[0..n-1]) {
// Μετατροπή του A σε σωρό
    for (i=1; i < n; i++) Heapify(A[0..i]);
}
```



αρχικά

0	1	2	3	4	5
2	3	1	6	5	4

μετά ανακύκλωση i = 1

0	1	2	3	4	5
2	3	1	6	5	4

μετά ανακύκλωση i = 2

2	3	1	6	5	4

μετά ανακύκλωση i = 3

6	3	1	2	5	4

μετά ανακύκλωση i = 4

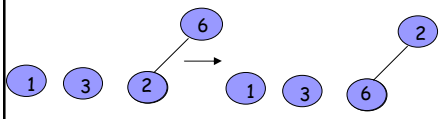
6	3	5	2	1	4

μετά ανακύκλωση i = 5

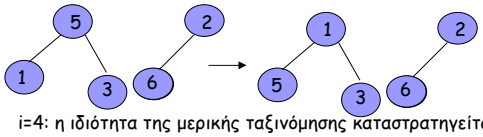
6	4	5	2	3	1

i=1: τα φύλλα 3 και 2 δεν έχουν παιδιά ⇒ η Heapify() δεν επιφέρει καμία αλλαγή!

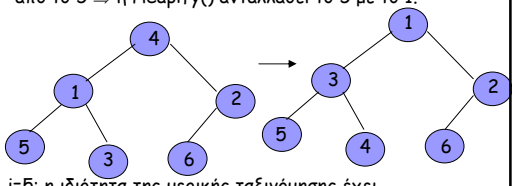
i=2: τα φύλλα 1, 3 και 2 δεν έχουν παιδιά ⇒ η Heapify() δεν επιφέρει καμία αλλαγή!



i=3: ο κόμβος 6 είναι ο μόνος που έχει παιδιά ⇒ η Heapify() ανταλλάσει το 6 με το παιδί του, που έχει τιμή 2 και είναι μικρότερο.



i=4: η ιδιότητα της μερικής ταξινόμησης καταστρατηγείται από το 5 ⇒ η Heapify() ανταλλάσει το 5 με το 1.



i=5: η ιδιότητα της μερικής ταξινόμησης έχει καταστρατηγηθεί στη ρίζα ⇒ η Heapify() ανταλλάσει το 4 με το 1 και στη συνέχεια το 4 με το 3.

Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος HeapSort()

Χρονική Πολυπλοκότητα της HeapSort()

≤ (Χρονική Πολυπλοκότητα της InitializeHeap()) +
((n-1) * Χρονική Πολυπλοκότητα της Heapify(A[0..n-1]))

- (Χρονική Πολυπλοκότητα της InitializeHeap()) ≤
  (n-1) * (Χρονική Πολυπλοκότητα της Heapify(A[0..n-1]))
- Χρονική Πολυπλοκότητα της Heapify(A[0..n-1]) = O(logn)!
- Επομένως:

Χρονική Πολυπλοκότητα της HeapSort() = O(nlogn)!

Χωρική Πολυπλοκότητα της HeapSort()

- Τα στοιχεία αποθηκεύονται κάθε χρονική στιγμή στον ίδιο τον πίνακα A.

➧ Ο αλγόριθμος είναι πολύ αποδοτικός ως προς την χωρική πολυπλοκότητα.

Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος MergeSort()

Τεχνική «Διαίρει και Κυρίευε»

Η τεχνική περιλαμβάνει τρία βήματα:

1. **Διαίρεση** του προβλήματος σε διάφορα υποπροβλήματα που είναι παρόμοια με το αρχικό πρόβλημα αλλά μικρότερου μεγέθους.
2. **Κυριαρχία** επί των υποπροβλημάτων, επιλύοντας τα αναδρομικά μέχρι αυτά να γίνουν αρκετά μικρού μεγέθους οπότε και τα επιλύουμε απευθείας.
3. **Συνδυασμός** των επιμέρους λύσεων των υποπροβλημάτων ώστε να συνθέσουμε μια λύση του αρχικού προβλήματος.

Ο αλγόριθμος MergeSort() ακολουθεί το μοντέλο «Διαίρει και Κυρίευε»:

1. **Διαίρεση:** Η προς ταξινόμηση ακολουθία των n στοιχείων διαιρείται σε δύο υπακολουθίες των n/2 στοιχείων η κάθε μια.
2. **Κυριαρχία:** Οι δυο υπακολουθίες ταξινομούνται καλώντας αναδρομικά τη MergeSort() για κάθε μια από αυτές. Η αναδρομή εξαντλείται όταν η προς ταξινόμηση υπακολουθία έχει μήκος 1 (αφού κάθε υπακολουθία μήκους 1 είναι ταξινομημένη).
3. **Συνδυασμός:** Συγχωνεύουμε τις δύο ταξινομημένες υπακολουθίες ώστε να σχηματίσουμε την τελική ταξινομημένη ακολουθία.

Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος MergeSort()

Διαδικασία Συγχώνευσης

- Χρησιμοποιείται μια βοηθητική διαδικασία Merge(table A, int p,q,r), της οποίας οι παράμετροι είναι ένας πίνακας A και τρεις ακέραιοι, δείκτες στον πίνακα, τ.ω. $p \le q < r$.

- Η διαδικασία προϋποθέτει ότι οι υποπίνακες A[p..q] και A[q+1..r] είναι ταξινομημένοι και συγχωνεύει τα στοιχεία τους ώστε να σχηματίσει μια ενιαία ταξινομημένη υπακολουθία, η οποία αντικαθιστά την αρχική A[p..r].

- Αποθηκεύουμε στο τέλος κάθε υποπίνακα έναν κόμβο φρουρό, ώστε όταν αυτός προσεγγισθεί, η τιμή του να είναι σίγουρα μεγαλύτερη από την τιμή του τρέχοντος στοιχείου στον άλλο υποπίνακα.

```
void Merge(table A, int p,q,r) {
   n1 = q-p+1;
   n2 = r-q;
   // δημιουργία υποπινάκων L[0..n1] και R[0..n2]
   for (i=0; i < n1; i++)
      L[i] = A[p+i];
   for (i = 0; i < n2; i++)
      R[i] = A[q+1+i];
   i = j = 0;
   L[n1] = R[n2] = ∞; // κόμβοι φρουροί των πινάκων
   for (k = p; k <= r; k++) {
      if (L[i] < R[j]) {
         A[k] = L[i];
         i++;
      }
      else {
          A[k] = R[j];
          j++;
      }
   } /* for */  } /*Merge */
```

Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος MergeSort()

Συνθήκη που ισχύει αναλλοίωτη κατά την εκτέλεση της Merge()
«Στην αρχή κάθε επανάληψης της 3ης for, ο υποπίνακας A[p..k-1] περιέχει τα k-p μικρότερα στοιχεία των L[0..n1] και R[0..n2], ταξινομημένα. Επιπλέον, τα L[i] και R[j] είναι τα μικρότερα στοιχεία των υποπινάκων αυτών που δεν έχουν ακόμη καταχωρηθεί στον πίνακα A.»

Ο ισχυρισμός αυτός αποδεικνύεται με επαγωγή στο k. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για το σπίτι!

Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα της Merge();

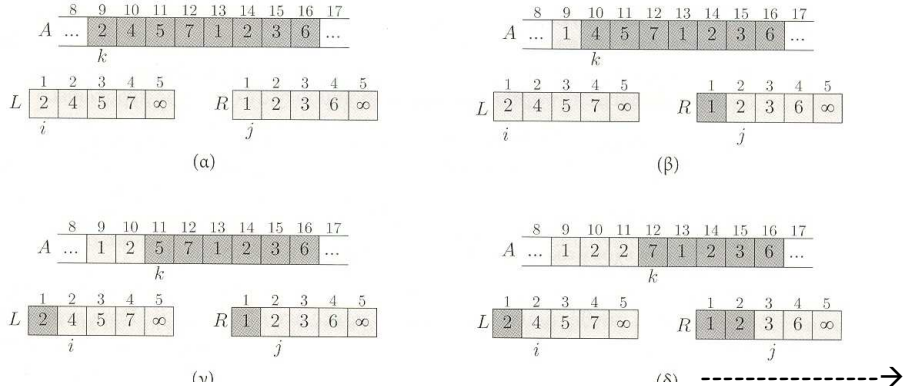
Θ(n1+n2) = Θ(n)!

```
void Merge(table A, int p,q,r)
{
   n1 = q-p+1;  ----------→ Θ(1)
   n2 = r-q;    ----------→ Θ(1)

   for (i=0; i < n1; i++) --
      L[i] = A[p+i];      -→Θ(n1)
   for (i = 0; i < n2; i++) --
      R[i] = A[q+1+i];  -→ Θ(n2)
   i = j = 0;   ----------→ Θ(1)
   L[n1] = R[n2] = ∞; ---→Θ(1)
   for (k = p; k <= r; k++)
      if (L[i] < R[j]) {
         A[k] = L[i];  i++;
      }
      else {
         A[k] = R[j]; j++;
      }
}
```

Θ(n1+n2)

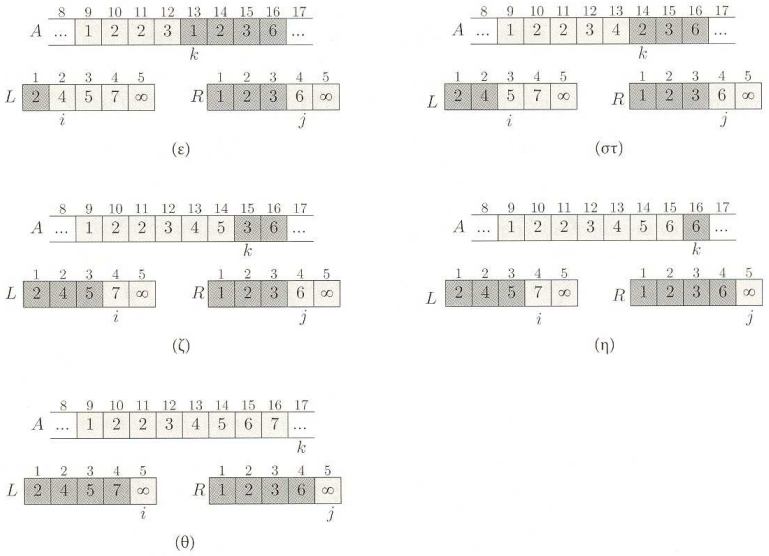
Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος MergeSort()



Παράδειγμα εκτέλεσης της Merge(A, 9, 12, 16), όπου A[9..16] = <2,4,5,7,1,2,3,6>

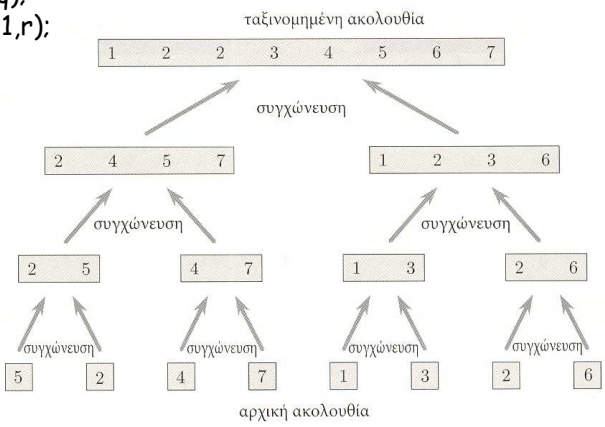
- Οι ελαφρά σκιασμένες θέσεις στον πίνακα A έχουν λάβει τις τελικές τους τιμές, ενώ οι έντονα σκιασμένες θέσεις θα αντικατασταθούν στη συνέχεια από άλλες τιμές.
- Οι ελαφρά σκιασμένες θέσεις στους πίνακες L,R περιέχουν τιμές οι οποίες δεν έχουν ακόμη επανακαταχωρηθεί στον A, ενώ οι έντονα σκιασμένες το αντίθετο.

Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος MergeSort()



Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος MergeSort()

```
void MergeSort(table A, int p, r) {
    if (p < r) {
        q = ⌊(p+r)/2⌋;
        MergeSort(A,p,q);
        MergeSort(A,q+1,r);
        Merge(A,p,q,r);
    }
}
```



Ανάλυση Αλγορίθμων τύπου «Διαίρει και Κυρίευε»

Έστω T(n) ο χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου που λειτουργεί βάσει της τεχνικής «διαίρει και κυρίευε», όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

Αν το n είναι αρκετά μικρό, π.χ., $n \leq c$, όπου c είναι μια σταθερά, η απευθείας λύση απαιτεί χρόνο $\Theta(1)$.

Έστω ότι κατά τη διαίρεση του προβλήματος προκύπτουν a υποπροβλήματα που το καθένα έχει μέγεθος το 1/b του μεγέθους του πλήρους προβλήματος.

Έστω ότι η διαίρεση του προβλήματος σε υποπροβλήματα απαιτεί χρόνο D(n) και ότι η σύνθεση των επιμέρους λύσεων των υποπροβλημάτων για το σχηματισμό της πλήρους λύσης απαιτεί χρόνο C(n). Τότε:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{αν } n \leq c \\ aT(n/b) + D(n) + C(n) & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ανάλυση αλγορίθμου MergeSort()

- Υποθέτουμε ότι το n είναι κάποια δύναμη του 2 (για λόγους απλότητας).
- Η MergeSort() για ένα μόνο στοιχείο απαιτεί σταθερό χρόνο $\Theta(1)$.
- Όταν εκτελείται σε (υπο)πίνακα με n > 1 στοιχεία, αναλύουμε τη χρονική πολυπλοκότητα ως εξής:

  Διαίρει: D(n) = $\Theta(1)$ (υπολογισμός του μεσαίου στοιχείου του υποπίνακα σε χρόνο $\Theta(1)$)

  Κυρίευε: Αναδρομική επίλυση δύο υπο-προβλημάτων μεγέθους n/2 τα καθένα. Άρα, το χρονικό κόστος του βήματος αυτού είναι 2T(n/2).

  Συνδύασε: Η κλήση της Merge() απαιτεί χρόνο $\Theta(n) \Rightarrow C(n) = \Theta(n)$.

Η αναδρομική σχέση που περιγράφει τη χρονική πολυπλοκότητα της MergeSort() είναι:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{αν } n = 1, \\ 2T(n/2) + c_2 n & \text{αν } n > 1, \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές.

Άσκηση για το σπίτι
Αποδείξτε (είτε επαγωγικά ή με τη μέθοδο της αντικατάστασης) ότι $T(n) = \Theta(n \log n)$!

Ταξινόμηση - Ο αλγόριθμος QuickSort()

Βασίζεται στην τεχνική «Διαίρει και Κυρίευε».

Διαίρεση: Επιλέγεται ένα στοιχείο x της προς ταξινόμηση ακολουθίας (π.χ., το τελευταίο) και η αρχική ακολουθία A[p..r] χωρίζεται στις υπακολουθίες A[p..q-1] και A[q+1..r] έτσι ώστε κάθε στοιχείο της A[p..q-1] να είναι μικρότερο του x, ενώ κάθε στοιχείο της A[q+1..r] να είναι μεγαλύτερο του x. Μέρος του βήματος αυτού είναι και ο υπολογισμός της κατάλληλης θέσης q του πίνακα στην οποία θα πρέπει να βρίσκεται το στοιχείο x μετά την ταξινόμηση.

Κυριαρχία: Ταξινομούμε τις δύο υπακολουθίες A[p..q-1] και A[q+1..r] με αναδρομικές κλήσεις της QuickSort().

Συνδυασμός: Δεν χρειάζεται κάποια ιδιαίτερη ενέργεια για το συνδυασμό των δυο υπακολουθιών A[p..q-1] και A[q+1..r], αφότου αυτές ταξινομηθούν (λόγω του τρόπου που αυτές δημιουργήθηκαν). Δηλαδή, η συνολική ακολουθία A[p..r] είναι και αυτή ταξινομημένη χωρίς την εκτέλεση περαιτέρω ενεργειών.

Παρατηρήσεις

☹ Ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της QuickSort() για ένα πίνακα n στοιχείων είναι $\Theta(n^2)$.

☺ Ο αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσής της είναι $\Theta(n \log n)$!

☺ Οι σταθεροί συντελεστές που κρύβονται στο Θ είναι μικροί!

Ο αλγόριθμος QuickSort() θα μελετηθεί αναλυτικά στο μάθημα «Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα».

Ενότητα 10
Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης (Union-Find)

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

Έστω ότι $S_1, \ldots, S_k$ είναι ξένα υποσύνολα ενός συνόλου **U**, δηλαδή $S_i \cap S_j = \varnothing$, για κάθε i,j με $i \neq j$ και $S_1 \cup \ldots \cup S_k = \mathbf{U}$.

Λειτουργίες

- *MakeSet(X):* επιστρέφει ένα νέο σύνολο που περιέχει μόνο το σύνολο X.
- *Union(S, T):* επιστρέφει το σύνολο $S \cup T$, το οποίο αντικαθιστά τα S, T.
- *Find(X):* επιστρέφει το σύνολο S στο οποίο ανήκει το στοιχείο X.

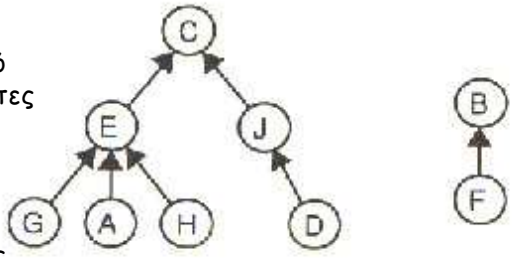
Εφαρμογές

- Το πρόβλημα της διαχειρίσεως ξένων μεταξύ τους συνόλων εμφανίζεται σε αρκετές εφαρμογές.
  - Υπάρχουν αλγόριθμοι ευρέσεως σκελετικών δένδρων (spanning trees) που ξεκινούν από n στοιχειώδη σκελετικά δένδρα με έναν κόμβο το καθένα και βήμα προς βήμα συνενώνουν ξένα μεταξύ τους σκελετικά υποδένδρα μέχρι να προκύψει τελικά ένα δένδρο που αποτελεί το προς αναζήτηση σκελετικό δένδρο.

Ξένα Σύνολα με τη λειτουργία της Ένωσης

Up-Tree

- Είναι δένδρο στο οποίο κάθε κόμβος διατηρεί μόνο ένα δείκτη προς τον πατρικό του κόμβο (έτσι όλοι οι δείκτες δείχνουν προς τα πάνω).
- Ένας κόμβος μπορεί να έχει οποιοδήποτε πλήθος παιδιών.
- Το σύνολο U είναι ένα δάσος από Up-trees.



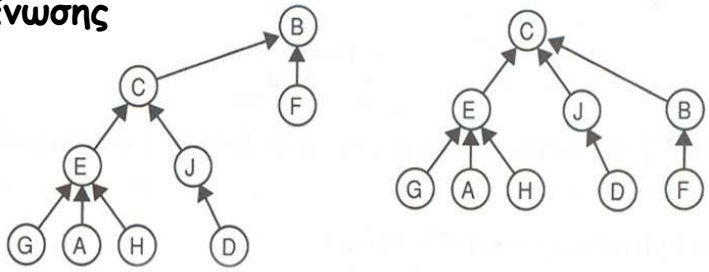
- Κάθε τέτοιο δένδρο περιέχει τα στοιχεία ενός από τα ξένα σύνολα. Το στοιχείο της ρίζας αποτελεί το αναγνωριστικό του συνόλου.

Υλοποίηση Find(X)

Ακολούθησε τους δείκτες από τον κόμβο προς τη ρίζα. $O(\text{ύψος δένδρου})$

Ποια είναι η πολυπλοκότητα της Find();

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης



Έλεγχος αν ένα στοιχείο Χ ανήκει στο σύνολο S
Ελέγχουμε αν η Find(X) επιστρέφει S.

Υλοποίηση Union(S,T)
Κάνε τη ρίζα του ενός δένδρου να δείχνει στη ρίζα του άλλου.

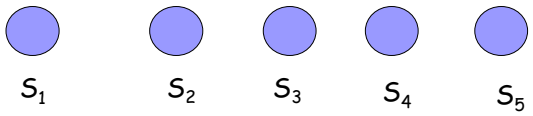
Ποια είναι η πολυπλοκότητα της Union(); $O(1)$

- Είναι επιθυμητό να κρατήσουμε το ύψος του δένδρου όσο το δυνατό μικρότερο
  ⇒ Χρειάζεται προσοχή στο ποιού δένδρου η ρίζα θα δείξει στη ρίζα του άλλου!

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

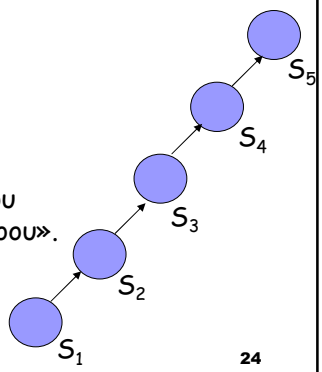
Παράδειγμα
Έστω ότι έχουμε n σύνολα με ένα στοιχείο το καθένα.

Ποιο είναι το χειρότερο ύψος δένδρου που μπορεί να προκύψει και πως πρέπει να εκτελεστεί η Union() για να προκύψει ένα τέτοιο δένδρο;

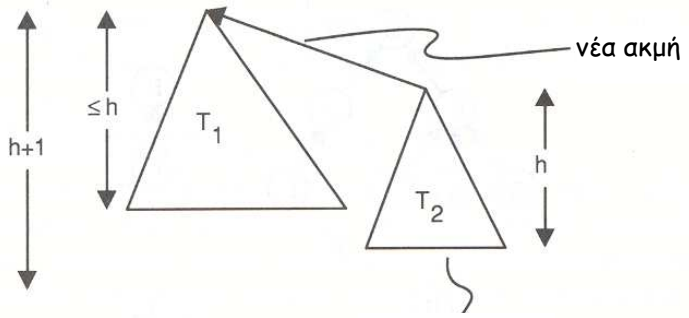


Στρατηγική για μείωση ύψους δένδρου
«Πάντα συνενώνουμε το μικρότερο δένδρο στο μεγαλύτερο, δηλαδή κάνουμε τη ρίζα του μικρότερου δένδρου να δείχνει στη ρίζα του μεγαλύτερου δένδρου».

Ένα δένδρο είναι **μεγαλύτερο** από ένα άλλο αν έχει περισσότερους κόμβους.



Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης



Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

Κάθε κόμβος είναι ένα struct με πεδία κάποια πληροφορία για το στοιχείο, το δείκτη **parent** στο γονικό κόμβο, και ένα μετρητή **count**, που χρησιμοποιείται μόνο αν ο κόμβος είναι η ρίζα και περιέχει το πλήθος των κόμβων στο up-tree.

```
pointer UpTreeFind(pointer P) {
// return the root of the tree containing P

  if (P == NULL) error;
  q = P;
  while (q->parent != NULL) do
       q = q->parent
  return q;
}
```

```
pointer UpTreeUnion(pointer S,T) {
// S and T are roots of up-trees */
// returns result of merging smaller into larger
   if (S == NULL OR P == NULL) return;
   if (S->count >= T->count) {
      S->count = S->count + T->count;
      T->parent = S;
      return S;
   }
   else {
      T->count = T->count + S->count;
      S->parent = T;
      return T;
   }
}
```

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

Λήμμα

Έστω ότι T είναι ένα up-tree που αναπαριστά ένα σύνολο μεγέθους n, το οποίο δημιουργήθηκε με τη συνένωση n συνόλων μεγέθους 1 χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο. Τότε, το ύψος του T είναι το πολύ log n.

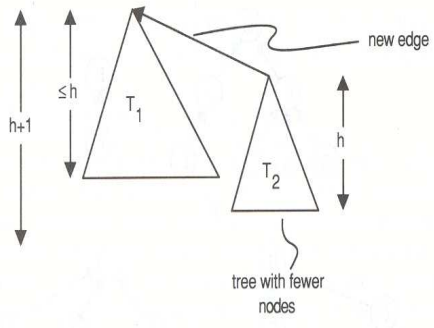
Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ότι για κάθε h, αν το T είναι up-tree ύψους h που δημιουργήθηκε από τη συνένωση n συνόλων μεγέθους 1 (βάσει του αλγορίθμου της σελίδας 26), τότε το T έχει τουλάχιστον 2^h κόμβους, δηλαδή $|T| \geq 2^h$. Με επαγωγή στο h.

Βάση Επαγωγής (h=0): Τότε το T αποτελείται από έναν μόνο κόμβο $\Rightarrow$ $|T| = 1 \geq 2^0$.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε πως για κάθε up-tree S, αν το ύψος h' του S είναι $\leq h$, τότε $|S| \geq 2^{h'}$.

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

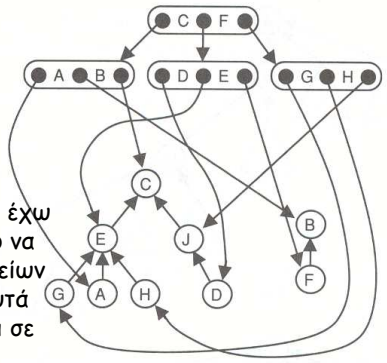
Επαγωγικό Βήμα: Συμβολίζουμε με T το πρώτο δένδρο που δημιουργείται με ύψος h+1 (εφαρμόζοντας τον παραπάνω αλγόριθμο).
Τότε, το T δημιουργείται με τη συνένωση ενός up-tree T_2 σε ένα up-tree T_1 για τα οποία ισχύουν τα εξής: το T_2 έχει ύψος h, ενώ το T_1 έχει ύψος το πολύ h και $|T_1| \geq |T_2|$.
Από επαγωγική υπόθεση, $|T_2| \geq 2^h$.
Επομένως,
$|T| = |T_1| + |T_2| \geq 2*|T_2|$
$\geq 2*2^h = 2^{h+1}$.



Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

Ποια είναι η πολυπλοκότητα της Find(X);

Υπάρχει όμως ένα λεπτό σημείο
Πως βρίσκουμε τη θέση του X στο up-tree;
Η Find(X) εμπεριέχει μια LookUp(). Πως θα υλοποιήσουμε αυτή τη LookUp;



Περιπτώσεις

1. Ο χώρος των κλειδιών είναι μικρός (π.χ. έχω 100 κλειδιά συνολικά). Τότε, είναι εφικτό να αποθηκευτούν αυτά σε πίνακα 100 στοιχείων που περιέχει δείκτες σε κάθε ένα από αυτά τα κλειδιά, οπότε η LookUp() υλοποιείται σε σταθερό χρόνο.
2. Ο χώρος των κλειδιών είναι μεγάλος. Τότε, απαιτείται μια βοηθητική δομή (π.χ., μια από τις δενδρικές δομές που υλοποιούν λεξικά) που η πληροφορία κάθε κόμβου είναι δείκτης σε ένα από τα κλειδιά του up-tree.

Ποια είναι η πολυπλοκότητα της Find() με τα νέα δεδομένα; O(logn)

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

Στρατηγική Συμπίεσης Μονοπατιού
«Κατά τη διάρκεια εκτέλεσης μιας Find(X) κάνε το parent πεδίο κάθε κόμβου στο μονοπάτι που διατρέχεις από τον κόμβο με κλειδί X στη ρίζα να δείχνει στη ρίζα».

Τι αλλαγές επιφέρει η στρατηγική συμπίεσης μονοπατιού στην απόδοση?

Οι MakeEmptySet() και Union() εξακολουθούν να χρειάζονται σταθερό χρόνο.

Η Find() αρχικά εκτελείται μέσα στον ίδιο ακριβώς χρόνο όπως χωρίς να εφαρμόζεται η στρατηγική, αλλά μετά την εκτέλεση αρκετών Find(), η πολυπλοκότητά της γίνεται «σχεδόν σταθερή».

Τι θα πει σχεδόν σταθερή;

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

Για κάθε j, έστω F(j) η αναδρομική συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $F(0) = 1$ και $F(j+1) = 2^{F(j)}$, $j \geq 0$.

Οι τιμές της F(j) αυξάνουν πάρα πολύ γρήγορα καθώς αυξάνεται το j, π.χ., για $j = 5$, $F(5) = 2^{65536} \approx 10^{19728}$. Ο αριθμός αυτός είναι τρομερά μεγάλος (η διάμετρος του σύμπαντος είναι $\approx 10^{40}$ και το πλήθος μορίων σε ολόκληρο το σύμπαν είναι μικρότερο από 10^{120})!!!

Ορίζουμε την log*n να είναι η αντίστροφη της F:

$\log^* n = \underbrace{\log \log \log \ldots \log}_{j \text{ φορές}} n$

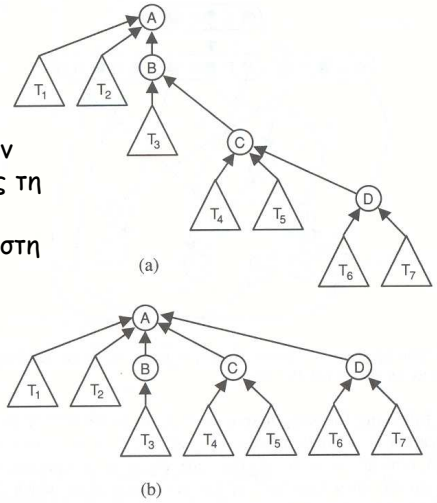
Οι τιμές της log*n μειώνονται πάρα πολύ γρήγορα καθώς αυξάνει το n, π.χ., log*n είναι ≤ 5 για οποιαδήποτε «χρήσιμη» τιμή του n.

Αν η Find() εκτελείται σε χρόνο O(log*n) είναι επομένως σαν να είναι σταθερή! Αυτό συμβαίνει μετά από πολλαπλές εκτελέσεις της Find().

Ξένα Σύνολα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της Ένωσης

Τεχνική Συμπίεσης Μονοπατιού

Καθώς ακολουθείται το μονοπάτι από τον κόμβο από όπου εκκινείται η Find() προς τη ρίζα, το πεδίο parent κάθε κόμβου στο μονοπάτι ενημερώνεται ώστε να δείχνει στη ρίζα του δένδρου.



Αποτέλεσμα Find(D) όταν χρησιμοποιείται η στρατηγική συμπίεσης μονοπατιού.