

HY240: Δομές Δεδομένων Χειμερινό Εξάμηνο – Ακαδημαϊκό Έτος 2008-09 Διδάσκουσα: Παναγιώτα Φατούρου

1^η Σειρά Θεωρητικών Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: Δευτέρα, 12 Οκτωβρίου 2009, ώρα 19:00-20:00

Τρόπος Παράδοσης: Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν είτε σε ηλεκτρονική μορφή χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα submit (δείτε οδηγίες στην ιστοσελίδα του μαθήματος), είτε στους βοηθούς του μαθήματος τη Δευτέρα, 12 Οκτωβρίου 2009 (ώρα 19:00-20:00). Οι φοιτητές μπορούν να παραδίδουν τις ασκήσεις τους και νωρίτερα από αυτήν την ημερομηνία αλλά δικαιολογίες όπως «ήρθα την τάδε μέρα και δεν ήσασταν στο γραφείο σας» δεν θα γίνουν δεκτές. Όσοι από τους φοιτητές δεν έχουν καταφέρει να παραδώσουν τις ασκήσεις τους πριν τις 12/10 θα πρέπει να τις παραδώσουν στους βοηθούς του μαθήματος την προκαθορισμένη μέρα και ώρα. Εκπρόθεσμες ασκήσεις γίνονται δεκτές σε ηλεκτρονική μορφή και η αποστολή τους πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα submit. Εναλλακτικά, εκπρόθεσμες ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν στη διδάσκουσα του μαθήματος.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Παραδίδουμε τις ασκήσεις στο βοηθό του μαθήματος ή στη διδάσκουσα ή χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα submit. Δεν τοποθετούμε σε καμία περίπτωση τις ασκήσεις σε κουτιά που βρίσκονται στο υπόγειο των λευκών κτιρίων (ακόμη και αν σε αυτά αναγράφονται πληροφορίες που φαίνονται σχετικές με το μάθημα και την τρέχουσα σειρά ασκήσεων), αφού αυτό δεν εξασφαλίζει την ασφάλειά τους. Ασκήσεις που θα βρεθούν σε κουτιά δεν θα γίνουν δεκτές.

Ασκήσεις

1. α. Αποδείξτε επαγωγικά ότι $\forall n \geq 4$, ισχύει ότι $2^n < n!$.

β. Εξηγήστε που βρίσκεται το λάθος στην ακόλουθη επαγωγική απόδειξη.

(Προφανώς Εσφαλμένος) Ισχυρισμός: Όλα τα άτομα σε οποιοδήποτε σύνολο n ανθρώπων έχουν το ίδιο χρώμα ματιών.

Βάση Επαγωγής ($n=1$): Ο ισχυρισμός ισχύει τετριμμένα εφόσον υπάρχει μόνο ένα άτομο στο σύνολο.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλα τα σύνολα k ανθρώπων (δηλαδή υποθέτουμε ότι σε οποιοδήποτε σύνολο k ανθρώπων, ισχύει ότι όλα τα άτομα έχουν το ίδιο χρώμα ματιών).

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για οποιοδήποτε σύνολο $k+1$ ανθρώπων. Θεωρήστε οποιοδήποτε σύνολο $k+1$ ανθρώπων. Έστω ότι $1, 2, 3, \dots, k+1$ είναι τα $k+1$ άτομα που ανήκουν στο σύνολο αυτό. Έστω τα εξής δύο σύνολα ανθρώπων $S_1 = \{1, 2, \dots, k\}$ και $S_2 = \{2, \dots, k+1\}$ που το καθένα περιέχει k ανθρώπους. Από επαγωγική υπόθεση, όλα τα άτομα στο S_1 έχουν το ίδιο χρώμα ματιών μεταξύ τους. Από επαγωγική υπόθεση, το ίδιο ισχύει και για όλα τα άτομα στο σύνολο S_2 . Εφόσον τα $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ (δηλαδή τα S_1 και S_2 έχουν κοινά στοιχεία), από τα παραπάνω προκύπτει ότι όλοι οι $k+1$ άνθρωποι $1, 2, \dots, k+1$ έχουν το ίδιο χρώμα ματιών. Άρα, ο (προφανώς εσφαλμένος) ισχυρισμός μοιάζει να έχει αποδειχθεί.

Που βρίσκεται το λάθος στην παραπάνω επαγωγική απόδειξη;

γ. **Επίσκεψη στο ταχυδρομείο.** Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να αποσταλεί ένα γράμμα το οποίο κοστίζει $n \geq 8$ ευρώ αλλά την συγκεκριμένη μέρα το ταχυδρομείο έχει γραμματόσημα μόνο των 3 και των 5 ευρώ. Αποδείξτε επαγωγικά πως $\forall n \geq 8$, είναι δυνατόν να πληρωθεί το ποσό των

n ευρώ αγοράζοντας γραμματόσημα των 3 και των 5 ευρώ που παρέχει τη συγκεκριμένη μέρα το ταχυδρομείο.

Παρατήρηση: Εξετάστε προσεκτικά όλα τα βήματα της επαγωγής για να δείτε αν η απόδειξη που παρέχετε είναι σωστή για κάθε βήμα της επαγωγής. Προσέξτε τις συνθήκες που ισχύουν στην επαγωγική υπόθεση.

2. Θεωρήστε την ακόλουθη διαδικασία, όπου η $\text{swap}(\text{int } a, \text{int } b)$ ανταλλάζει την τιμή της μεταβλητής a με την τιμή της μεταβλητής b .

```
void MySort(table T[0..n-1]: array of integers) {  
    for m = 0 to n-2 do {  
        j = m;  
        for k = m+1 to n-1 do {  
            if T[k] < T[j] then j = k;  
        }  
        swap(T[m], T[j]);  
    }  
}
```

α. Παρουσιάστε σύντομη περιγραφή του τρόπου λειτουργίας της $\text{MySort}()$. Ποιο είναι το αποτέλεσμα της $\text{MySort}()$;

β. Ιχνηλατίστε (δηλαδή «εκτελέστε» στο χαρτί - κάνετε trace) τη $\text{MySort}(T[0..5])$ για την περίπτωση που $T = [50, 20, 30, 10, 3, 15]$.

γ. Μελετήστε την τάξη της χρονικής πολυπλοκότητας της $\text{MySort}()$.

Υπόδειξη: Αφού βρείτε τη χρονική πολυπλοκότητα $T(n)$ του αλγορίθμου, βρείτε την τάξη στην οποία ανήκει (συμβολισμός Θ).

3. α. Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές a και b , όπου $b > 0$, ισχύει ότι $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$.

β. Έστω ότι οι $f(n)$ και $g(n)$ είναι συναρτήσεις μη-αρνητικών τιμών. Αποδείξτε ότι $\max\{f(n), g(n)\} \in \Theta(f(n)+g(n))$.

γ. Ισχύει ότι $2^{n+1} \in \Theta(2^n)$ και γιατί;

δ. Ισχύει ότι $\sqrt{n^5} \in \Theta(n^2)$ και γιατί;

ε. Έστω $p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$, όπου $a_i > 0$, $0 \leq i \leq d$, είναι πραγματικές σταθερές. Αποδείξτε ότι, για κάθε σταθερά k , ισχύουν τα εξής:

i. Αν $k \geq d$, τότε $p(n) \in O(n^k)$.

ii. Αν $k \leq d$, τότε $p(n) \in \Omega(n^k)$.

iii. Αν $k=d$, τότε $p(n) \in \Theta(n^k)$.