

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

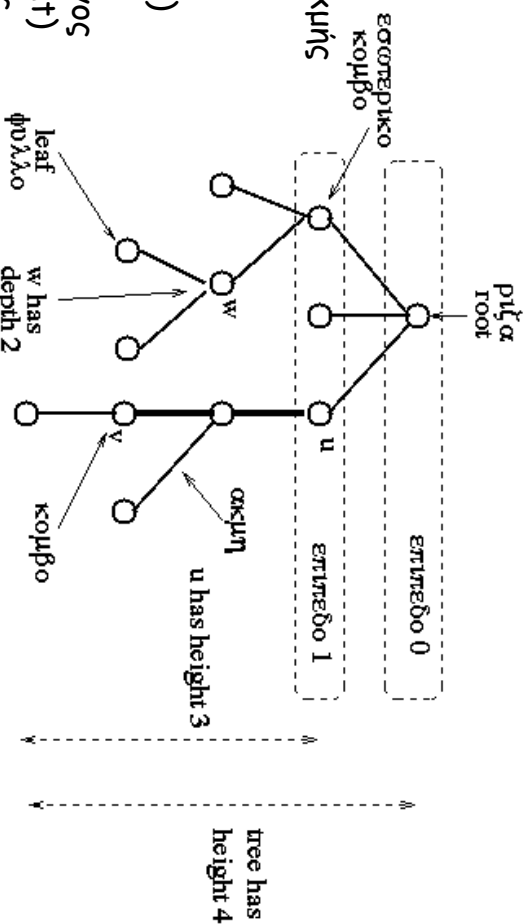
ΔΕΝΔΡΑ

ΗΥ240 - Παναγιώτα Φατούρου

1

Δένδρα

- ❑ Κόμβοι (nodes)
- ❑ Ακμές (edges)
- ❑ Ουρά και κεφαλή ακμής (tail, head)
- ❑ Γονέας - Παιδί - Αδελφικός κόμβος (parent, child, sibling)
- ❑ Μονοπάτι (path)
- ❑ Πρόγονος - απόγονος (ancestor, descendant)
- ❑ Φύλλο - Εσωτερικός Κόμβος (leaf, non-leaf)



Ένα δένδρο T αποτελείται από ένα σύνολο από κόμβους μεταξύ των οποίων ορίζεται μια σχέση γονέα-παιδιού με τις εξής ιδιότητες:

- ❑ Αν το T δεν είναι το κενό δένδρο, περιέχει έναν ειδικό κόμβο που ονομάζεται **ρίζα** και δεν έχει γονέα.
- ❑ Για οποιοδήποτε άλλο κόμβο v του T υπάρχει ένας μοναδικός κόμβος w στο T που αποτελεί το **γονέα** του v .

ΗΥ240 - Παναγιώτα Φατούρου

2

Δένδρα

Βαθμός Κόμβου (node degree)

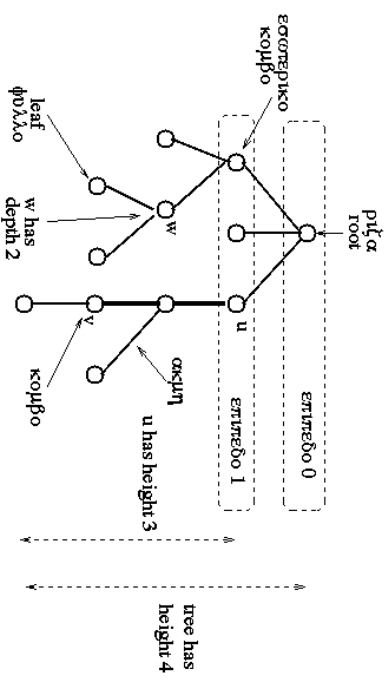
Ο αριθμός των παιδιών του κόμβου.

Βαθμός Δένδρου (tree degree)

Μέγιστος βαθμός μεταξύ των κόμβων του δένδρου.

Επίπεδο (level)

Η ρίζα βρίσκεται στο επίπεδο 0. Ένας κόμβος βρίσκεται στο επίπεδο k αν η απόσταση του από τη ρίζα είναι k . Το επίπεδο είναι επομένως ένα σύνολο από κόμβους.



Υψος Κόμβου (node height)

Μήκος μακρύτερου μονοπατιού από τον κόμβο σε οποιοδήποτε φύλλο.

Υψος Δένδρου (tree height)

Μέγιστο ύψος μεταξύ των κόμβων του δένδρου.

Βάθος Κόμβου (node depth)

Μήκος μονοπατιού από τη ρίζα στον κόμβο.

Βάθος Δένδρου (tree depth)

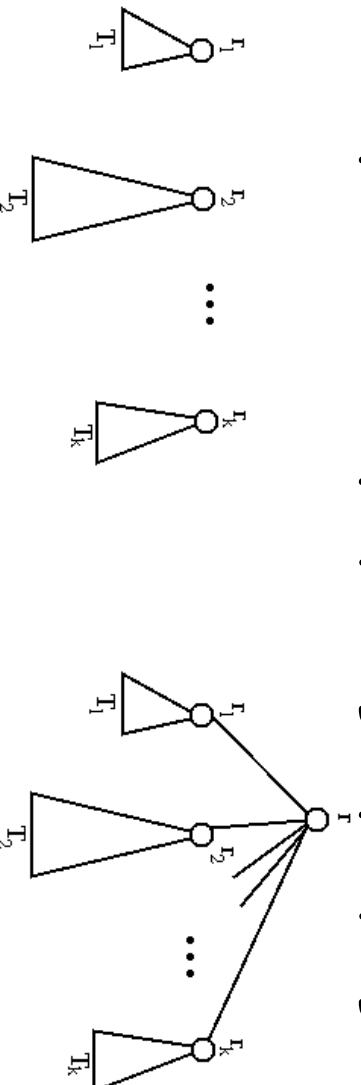
Μέγιστο βάθος μεταξύ των κόμβων του δένδρου.

$$\text{Υψος Δένδρου} = \text{Βάθος Δένδρου}$$

ΗΥ240 - Παναγιώτα Φατούρου

3

Δένδρα - Αναδρομικός Ορισμός



Ένα **κενό δένδρο** T δεν περιέχει κόμβους και ακμές.

Ένα (μη-κενό) **δένδρο** T είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από έναν ή περισσότερους κόμβους $T.w$:

□ Ένας μόνο κόμβος (Χωρίς καμία ακμή) αποτελεί ένα δένδρο. Ο κόμβος αυτός είναι και ρίζα του δένδρου.

□ Έστω ότι $T_1, \dots, T_k$ ($k > 0$) είναι δένδρα που δεν μοιράζονται κόμβους και έστω $r_1, \dots, r_k$ οι ρίζες τους. Έστω r ένας νέος κόμβος. Αν το T αποτελείται από τους κόμβους και τις ακμές των $T_1, \dots, T_k$, το νέο κόμβο r και τις νέες ακμές $\langle r, r_1 \rangle, \langle r, r_2 \rangle, \dots, \langle r, r_k \rangle$, τότε το T είναι δένδρο. Η ρίζα του T είναι το r . Τα $T_1, \dots, T_k$ είναι υποδένδρα του T .

ΗΥ240 - Παναγιώτα Φατούρου

4

Είδη Δένδρων

Διατεταγμένο Δένδρο

Δένδρο στο οποίο έχει οριστεί μια διάταξη στα παιδιά κάθε κόμβου.

Δυαδικό δένδρο

Διατεταγμένο δένδρο του οποίου κάθε κόμβος έχει το πολύ δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξί).

□ λ (nil ή NULL): κενό δυαδικό δένδρο (που δεν περιέχει κανένα κόμβο και καμία ακμή)

Γεμάτο Δυαδικό Δένδρο (full binary tree)

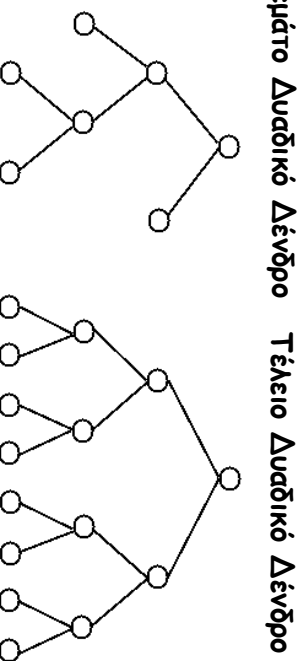
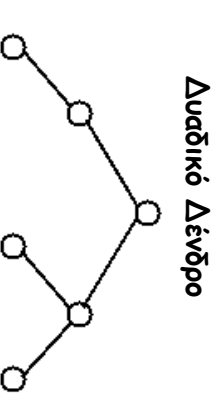
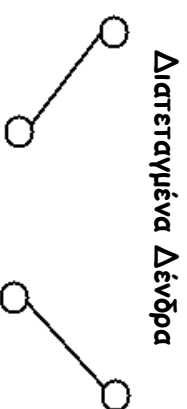
Δεν υπάρχει κόμβος με μόνο ένα παιδί στο δένδρο.

Τέλειο Δυαδικό Δένδρο (perfect binary tree)

Γεμάτο δυαδικό δένδρο στο οποίο όλα τα φύλλα έχουν το ίδιο βάθος.

Δάσος

Πεπερασμένο σύνολο από δένδρα.



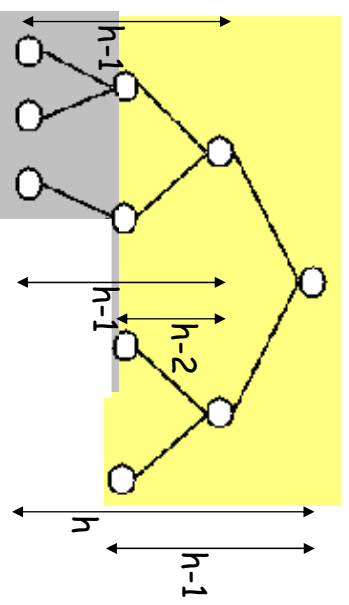
ΗΥ240 - Τανανιώτα Φατούρου

5

Είδη Δένδρων

Πλήρες Δυαδικό Δένδρο Ύψους h (complete binary tree of height h)

Αποτελείται από ένα τέλειο δυαδικό δένδρο ύψους $h-1$ στο οποίο έχουν προστεθεί ένα ή περισσότερα φύλλα με ύψος h . Τα φύλλα αυτά έχουν τοποθετηθεί στις αριστερότερες θέσεις του δένδρου.



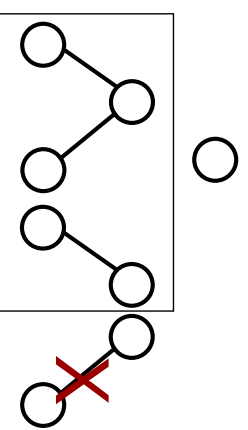
Αναδρομικός Ορισμός

□ Ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους 0 αποτελείται από ένα μόνο κόμβο.

□ Ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους 1 είναι ένα δένδρο ύψους 1 στο οποίο η ρίζα έχει είτε δύο παιδιά ή ένα μόνο αριστερό παιδί.

□ Ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους $h > 1$, αποτελείται από μια ρίζα και 2 υποδένδρα T, w :

- είτε το αριστερό υποδένδρο είναι τέλειο ύψους $h-1$ και το δεξιό είναι πλήρες ύψους $h-1$, ή
- το αριστερό υποδένδρο είναι πλήρες ύψους $h-1$ και το δεξιό είναι τέλειο ύψους $h-2$.



ΗΥ240 - Τανανιώτα Φατούρου

6

Ιδιότητες Δυαδικών Δένδρων

Πρόταση

Ένα τέλει δυαδικό δένδρο ύψους h έχει $2^{h+1} - 1$ κόμβους, εκ των οποίων 2^h είναι φύλλα και $2^h - 1$ είναι εσωτερικοί κόμβοι.

Απόδειξη

Με επαγωγή στο h .

Βάση επαγωγής, $h = 0$

Το τέλει δυαδικό δένδρο ύψους 0 αποτελείται μόνο από ένα κόμβο-ρίζα και άρα έχει 1 κόμβο που είναι φύλλο και 0 εσωτερικούς κόμβους.

Πράγματι:

$$2^{h+1} - 1 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ κόμβος}$$

$$2^h = 2^0 = 1 \text{ φύλλο}$$

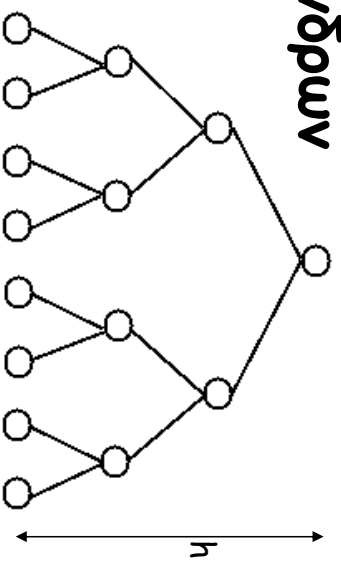
$$2^h - 1 = 0 \text{ εσωτερικοί κόμβοι}$$

Επαγωγική Υπόθεση

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε ακέραιο $k \geq 0$. Έστω ότι οποιοδήποτε τέλει δυαδικό δένδρο ύψους k έχει $2^{k+1} - 1$ κόμβους, εκ των οποίων 2^k είναι φύλλα και $2^k - 1$ είναι εσωτερικοί κόμβοι.

ΗΥ240 - Παναγιώτα Φατούρου

7



Ιδιότητες Δυαδικών Δένδρων

Επαγωγικό βήμα

Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για δένδρα ύψους $k+1$.

Ένα τέλει δένδρο T ύψους $k+1$

αποτελείται από 2 τέλεια δένδρα ύψους

k (έστω T_1, T_2) και τη ρίζα του. Από

επαγωγική υπόθεση καθένα από τα $T_1,$

T_2 , έχει $2^{k+1} - 1$ κόμβους, εκ των οποίων

2^k είναι φύλλα και $2^k - 1$ είναι

εσωτερικοί κόμβοι.

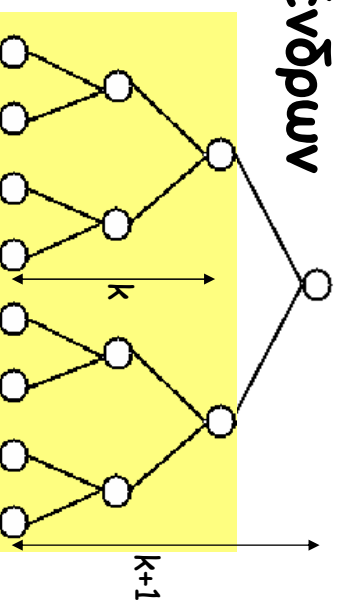
Άρα το T έχει:

$$2^*(2^{k+1} - 1) + 1 \text{ κόμβους} = 2^{k+2} - 1 \text{ κόμβους (όπως απαιτείται),}$$

εκ των οποίων:

$$2^k + 2^k = 2^{k+1} \text{ είναι φύλλα (όπως απαιτείται), και}$$

$$2^*(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1 \text{ είναι εσωτερικοί κόμβοι (όπως απαιτείται).}$$



ΗΥ240 - Παναγιώτα Φατούρου

8

Λειτουργίες σε Δένδρα

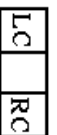
- Parent(v): επιστρέφει τον κόμβο γονέα του v ή null αν ο v είναι η ρίζα
- Children(v): επιστρέφει το σύνολο των παιδιών του v ή το άδειο σύνολο αν ο v είναι φύλλο
- FirstChild(v): επιστρέφει το πρώτο παιδί του v ή null αν ο v είναι φύλλο (σε διατεταγμένα δένδρα)
- RightSibling(v): επιστρέφει το δεξιό αδελφικό κόμβο του v ή null αν ο v είναι η ρίζα ή το δεξιότερο παιδί του γονικού του κόμβου
- LeftSibling(v): επιστρέφει τον αριστερό αδελφικό κόμβο του v ή null αν ο v είναι η ρίζα ή το αριστερότερο παιδί του γονικού του κόμβου
- LeftChild(v) (RightChild(v)): επιστρέφει το αριστερό (δεξιό, αντίστοιχα) παιδί του v (ή null)
- Isleaf(v): επιστρέφει true αν ο v είναι φύλλο, false διαφορετικά
- Depth(v): επιστρέφει το βάθος του v στο δένδρο
- Height(v): επιστρέφει το ύψος του v στο δένδρο

HY240 - Τανανιώτα Φατούρου

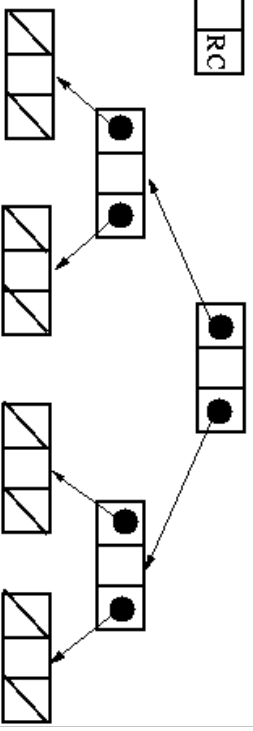
9

Υλοποίηση Δένδρων

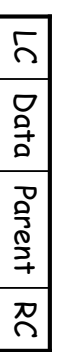
Υλοποίηση Δυναδίκων Δένδρων



Κάθε κόμβος έχει ένα πεδίο data και δύο δείκτες LC (Left Child) και RC (Right Child) που δείχνουν στο αριστερό και στο δεξιό παιδί του κόμβου αντίστοιχα.



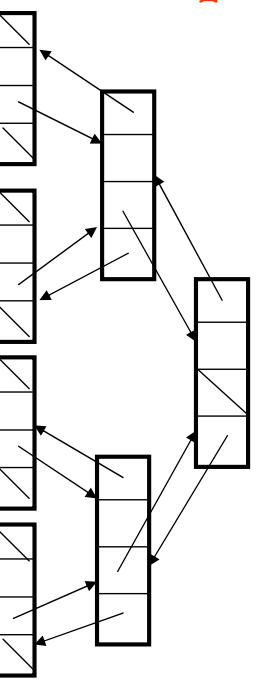
Οι λειτουργίες LeftChild() και RightChild() υλοποιούνται πολύ εύκολα σε $\Theta(1)$ χρόνο.



Είναι το ίδιο αλήθεια για τη λειτουργία Parent()?

Αποδοτική Υλοποίηση της Parent()

Κρατάμε και ένα τρίτο δείκτη σε κάθε κόμβο που δείχνει στον κόμβο γονέα («Διπλά Συνδεόμενο» δένδρο).



HY240 - Τανανιώτα Φατούρου

10

Δένδρα Αριθμητικών Εκφράσεων

Υπολογισμός Αριθμητικής Έκφρασης

□ *Label(y)*: ο αριθμός ή η πράξη που αποτελεί τα data του ν

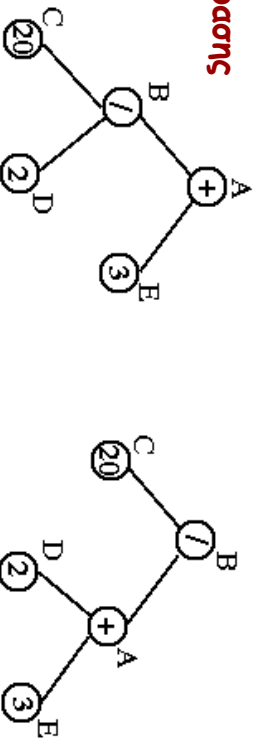
□ *ApplyOp(op: operation, x,y: numbers)*: υπολογίζει την έκφραση $x <op> y$, ανάλογα με το ποια πράξη είναι το op.

function Evaluate(pointer P): integer
/* Return value of the expression represented by the tree with root P */

```
integer x_l, x_r, res;  
if IsLeaf(P) then return Label(P)  
else {  
    x_l = Evaluate(LeftChild(P))  
    x_r = Evaluate(RightChild(P))  
    op = Label(P)  
    res = ApplyOp(op, x_l, x_r);  
    return res;  
}
```

HY240 - Παναγιώτα Φατούρου

11



```
if IsLeaf(P->A) -> FALSE  
x_l = Evaluate(P->B);    (<- 10)  
if IsLeaf(P->B) -> FALSE  
x_l = Evaluate(P->C);    (<- 20)  
if IsLeaf(P->C) return 20;  
x_r = Evaluate(P->D);    (<- 2)  
if IsLeaf(P->D) return 2;  
res = ApplyOp('/', 20, 2) = 20 / 2 = 10;  
return 10;  
x_r = Evaluate(P->E);    (<- 3)  
if IsLeaf(P->E) return 3;  
res = ApplyOp('+', 10, 3) = 10 + 3 = 13;  
return 13;
```

Διάσχιση Δένδρων

Διάσχιση ή διέλευση δένδρου (tree traversal) χαρακτηρίζεται κάθε διαδικασία επισκέψεως-επεξεργασίας όλων των κόμβων του δένδρου με συστηματικό τρόπο.

Ισοδύναμα, θα μπορούσε να οριστεί ως επιβολή ολικής διατάξεως επί των κόμβων του δένδρου μέσω συστηματικής ανακτήσεως των δεικτών και επεξεργασία των δεδομένων των κόμβων βάσει αυτής της διατάξεως.

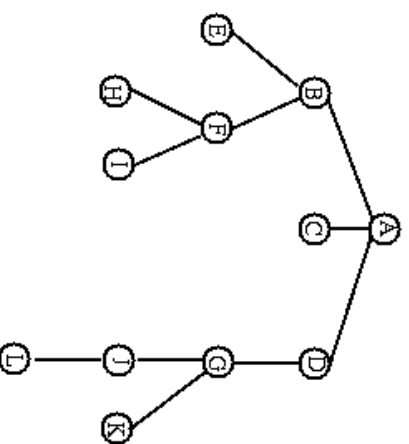
Η ύπαρξη πολλαπλών δυνατοτήτων για τη διάταξη ενός κόμβου ως προς τους απογόνους του, δημιουργεί διάφορα είδη διασχίσεων (προδιατεταγμένη διάσχιση, μεταδιατεταγμένη διάσχιση, ενδοδιατεταγμένη διάσχιση).

Visit(pointer p): αυθαίρετη λειτουργία που εφαρμόζεται στον κόμβο στον οποίο δείχνει ο δείκτης P

Παράδειγμα - Τύπωση των δεδομένων του κόμβου
Visit(pointer p) {
 print(p->data);
}

HY240 - Παναγιώτα Φατούρου

12



Προδιατεταγμένη Διάσχιση

Για κάθε κόμβο ν, η προδιατεταγμένη διάσχιση κάνει τα εξής με τη σειρά που αναφέρονται:

- ☐ Επίσκεψη του ν
- ☐ Επίσκεψη του αριστερού υποδένδρου του ν
- ☐ Επίσκεψη του δεξιού υποδένδρου του ν

Η διαδικασία διάσχισης ξεκινά από τη ρίζα.

Κάθε κόμβος προηγείται των παιδιών του στην διάταξη που προκύπτει.

Procedure PreOrder(pointer p) {

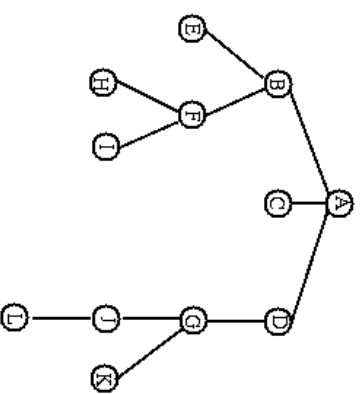
/* p is a pointer to the root of a **general tree** */

Visit(p);

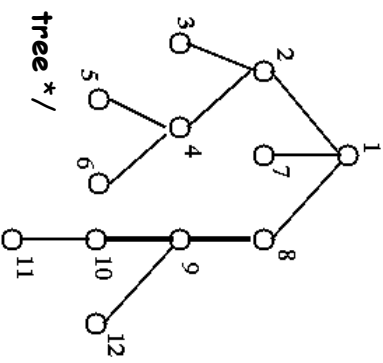
foreach child q of p, in order {

PreOrder(q);

}



Προδιατεταγμένη Διάταξη



Procedure PreOrder(pointer p) {
/* p is a pointer to the root of a **binary tree** */
if (p == NULL) return;
Visit(p);
PreOrder(p->LC);
PreOrder(p->RC);
}

HY240 - Παναγιώτα Φατούρου

13

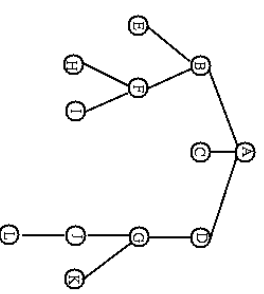
Παράδειγμα
Εκτύπωση Κόμβων

A,B,E,F,H,I,C,D,G,J,L,K

Ιχνηλατώντας την PreOrder

```

PreOrder(p->A)
if (p == NULL) // απορρίπτεται σε FALSE
  print(p->A); // τυπώνει το A
PreOrder(p->B);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->B); // τυπώνει το B
PreOrder(p->E);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->E); // τυπώνει το E
PreOrder(NULL); // LC του E
if (p == NULL) return;
PreOrder(NULL) // RC του E
if (p == NULL) return;
PreOrder(p->F);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->F); // τυπώνει το F
PreOrder(p->H);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->H); // τυπώνει το H
PreOrder(NULL); // LC του H
if (p == NULL) return;
PreOrder(NULL) // RC του H
if (p == NULL) return;
PreOrder(p->I);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->I); // τυπώνει το I
PreOrder(NULL); // LC του I
if (p == NULL) return;
PreOrder(NULL) // RC του I
if (p == NULL) return;
PreOrder(p->J);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->J); // τυπώνει το J
PreOrder(p->L);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->L); // τυπώνει το L
PreOrder(NULL); // LC του L
if (p == NULL) return;
PreOrder(NULL) // RC του L
if (p == NULL) return;
PreOrder(p->K);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->K); // τυπώνει το K
PreOrder(NULL); // LC του K
if (p == NULL) return;
PreOrder(NULL) // RC του K
if (p == NULL) return;
PreOrder(p->D);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->D); // τυπώνει το D
PreOrder(p->G);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->G); // τυπώνει το G
PreOrder(p->J); // LC του G
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->J); // τυπώνει το J
PreOrder(p->L);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->L); // τυπώνει το L
PreOrder(NULL); // LC του L
if (p == NULL) return;
PreOrder(NULL) // RC του L
if (p == NULL) return;
PreOrder(p->C);
if (p == NULL) // -> FALSE
  print(p->C); // τυπώνει το C
  
```



HY240 - Παναγιώτα Φατούρου

14

Μεταδιατεταγμένη Διάσχιση

Για κάθε κόμβο ν, η μεταδιατεταγμένη διάσχιση κάνει τα εξής με τη σειρά που αναφέρονται:

- Επίσκεψη του αριστερού υποδένδρου του ν
- Επίσκεψη του δεξιού υποδένδρου του ν
- Επίσκεψη του ν

Η διαδικασία διάσχισης ξεκινά από τη ρίζα.

Κάθε κόμβος έπεται των παιδιών του στην διάταξη.

Procedure PostOrder(pointer p) {

/* p is a pointer to the root of a **general tree** */

foreach child q of p, in order {

Postorder(q);

}

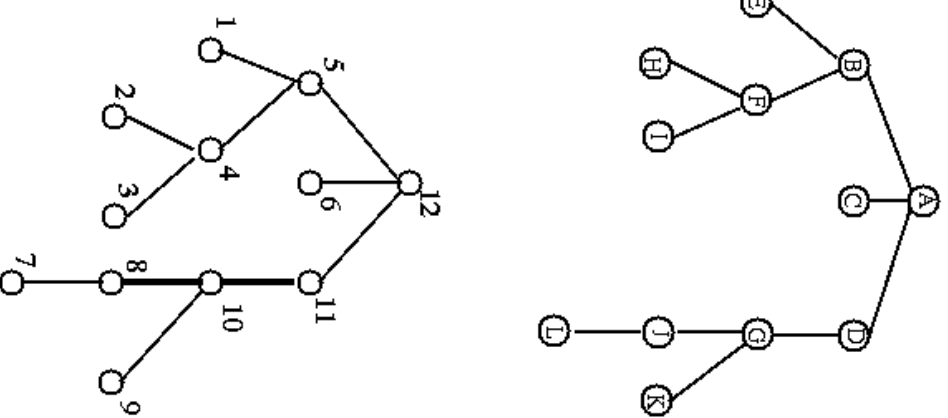
Visit(p);

}

**Παράδειγμα
Εκτύπωσης**

E,H,I,F,B,C,L,
J,K,G,D,A

```
Procedure PostOrder(pointer p) {  
/* p is a pointer to the root of a binary tree */  
if (p == NULL) return;  
PreOrder(p->LC);  
PreOrder(p->RC);  
Visit(p);  
}
```



HY240 - Παναγιώτα Φατούρου

Ενδοδιατεταγμένη Διάσχιση

Για κάθε κόμβο ν, η ενδοδιατεταγμένη διάσχιση κάνει τα εξής με τη σειρά που αναφέρονται:

- Επίσκεψη του αριστερού υποδένδρου του ν
- Επίσκεψη του ν
- Επίσκεψη του δεξιού υποδένδρου του ν

Η διαδικασία διάσχισης ξεκινά από τη ρίζα.

Το αριστερό παιδί ενός κόμβου ν προηγείται του ν, ενώ το δεξιό παιδί του έπεται του ν στην διάταξη.

Procedure InOrder(pointer p) {

/* p is a pointer to the root of a **binary tree** */

if (p == NULL) return;

PreOrder(p->LC);

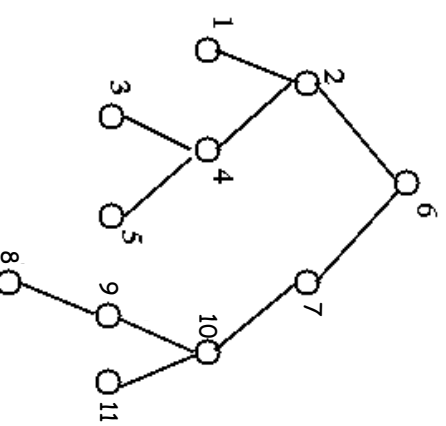
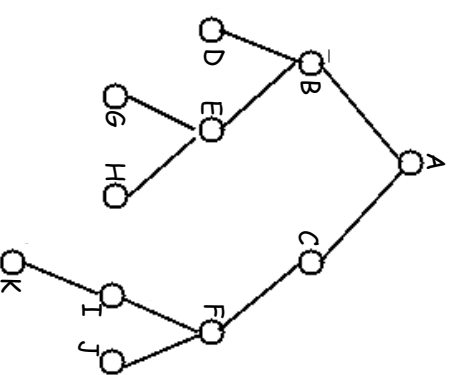
Visit(p);

PreOrder(p->RC);

}

Παράδειγμα Εκτύπωσης

D,B,G,E,H,A,C,K,I,F,J



HY240 - Παναγιώτα Φατούρου

Διασχίσεις Δένδρων

Διάσχιση Δένδρου κατά Επίπεδα (κατά πλάτος)

Επισκέπτεται τους κόμβους κατά αύξον βάθος και τους κόμβους του ίδιου επιπέδου από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Χρήση Ουράς

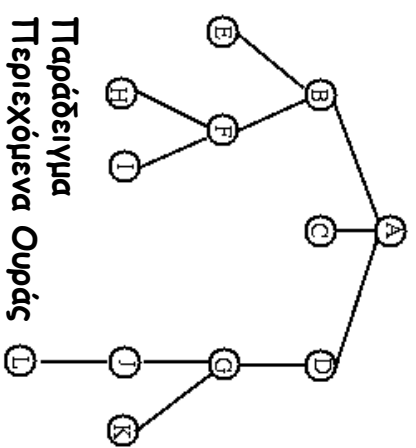
- Αρχικά η ουρά περιέχει μόνο τη ρίζα.
- Στη συνέχεια επαναληπτικά: κάνουμε Dequeue ένα στοιχείο της ουράς και προσθέτουμε τα παιδιά από αριστερά προς τα δεξιά του στοιχείου αυτού.

Procedure LevelOrder(pointer r) {

```
    Queue Q; pointer P;  
    MakeEmptyQueue(Q); Enqueue(Q,r);  
    while (!IsEmptyQueue(Q)) {  
        P = Dequeue(Q);  
        Visit(P);  
        foreach child c of P, in order, do  
            Enqueue(c);  
    }  
}
```

HY240 - Παναγιώτα Φατούρου

17



Διασχίσεις Δένδρων

Με Χρήση Στοιβάς

Αναδρομικές λύσεις έχουν ήδη συζητηθεί.

Χρονική Πολυπλοκότητα Διάσχισης;

$O(n)$, όπου n το πλήθος των κόμβων

Χωρική Πολυπλοκότητα;

Μέγεθος στοιβάς ανάλογο του ύψους του δένδρου.

Διάσχιση κατά Επίπεδα

Χρονική Πολυπλοκότητα Διάσχισης; $O(n)$

Γιατί;

Χωρική Πολυπλοκότητα;

Πόσους κόμβους μπορεί να περιέχει η ουρά στη χειρότερη περίπτωση;

Υλοποίηση Διατεταγμένων Δένδρων

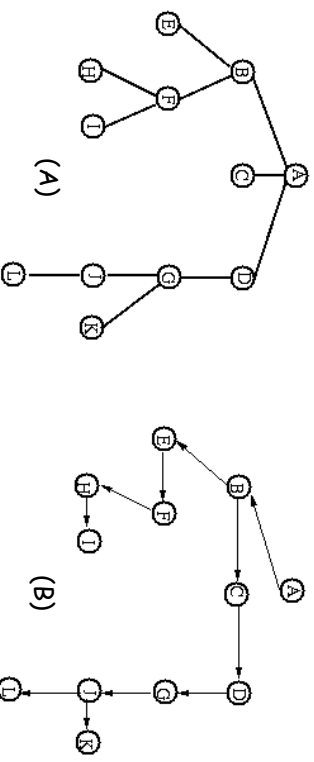
Αν είναι γνωστό το μέγιστο πλήθος παιδιών ενός κόμβου (έστω MC), ο κόμβος περιέχει έναν πίνακα με MC δείκτες έναν για κάθε δυνατικό παιδί του (κάποιοι από τους δείκτες μπορεί να είναι $NULL$ αν τα αντίστοιχα παιδιά δεν υπάρχουν).

Τι γίνεται αν δεν γνωρίζουμε τον αριθμό των παιδιών που μπορεί να έχει κάποιος κόμβος;

Απεικόνιση Διατεταγμένου Δένδρου ως Δυαδικό

Αν κάθε κόμβος διασυνδέεται με το αριστερότερο παιδί του και με τον πρώτο στα δεξιά αδελφικό του κόμβο, τότε αρκούν δύο δείκτες σε κάθε κόμβο.

Το αρχικό δένδρο μετασχηματίζεται σε δυαδικό!



Μορφή Κόμβου

LC	data	RS
----	------	----

- ☐ LC: Left Child
- ☐ RS: Right Sibling

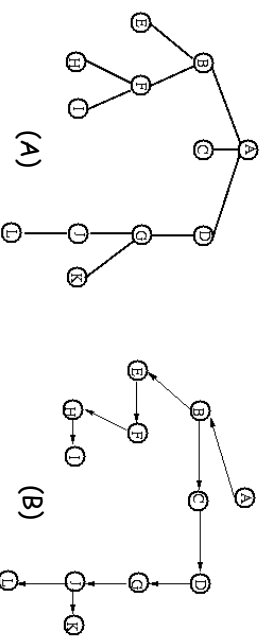
Υλοποίηση Διατεταγμένων Δένδρων

Μπορούμε να τυπώσουμε το διατεταγμένο δένδρο (A) βασιζόμενοι στο δυαδικό δένδρο (B):

- ☐ Επίσκεψη σε κάθε κόμβο ν.
- ☐ Η Visit τυπώνει το πεδίο data των κόμβων που αποτελούν παιδιά του κόμβου ν στο αρχικό δένδρο.

```

Procedure PrintTree(pointer R) {
    if (R == NULL) return;
    Visit(R);
    PrintTree(R->LC);
    PrintTree(R->RC);
}
    
```



```

Procedure Visit(pointer R) {
    pointer P;
    print(R->data); print(" Children: ");
    P = R->LC;
    while (P != NULL) {
        print(P->data);
        P = P->RS;
    }
    print("\n");
}
    
```

Υψος δυαδικού ως προς το αρχικό δένδρο: **Πολυπλοκότητες**

- ☐ FirstChild(), RightSibling(): $\Theta(1)$
- ☐ kth-child(k, v), εύρεση του k-οστού παιδιού του ν: $\Theta(k)$.
- ☐ Parent(): δεν υποστηρίζεται αποδοτικά.