ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Εξέταση Προόδου

Θέμα 1 - Βαθμός: 10
Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε επαρκώς. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογούνται.

i. (**2 μ.**) Η πολική μορφή του αριθμού -3 είναι η $-3e^{j\pi}$.

ii. (**2 μ.**) Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier X_k περιλαμβάνει τους συντελεστές

$$X_1 = \frac{-1}{j2\pi}, \quad X_{-1} = \frac{1}{j2\pi} \tag{1}$$

iii. (**2 μ.**) Ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = (2e^{-2t} - 3e^{-3t})u(t)$$

η οποία χαρακτηρίζει το σύστημα ως ασταθές.

iv. (**2 μ.**) Το πολυώνυμο $z^2 + 3z + 2$ έχει δυο μιγαδικές ρίζες.

v. (**2 μ.**) Ο μετασχ. Fourier του σήματος

$$\frac{1}{a + j2\pi t}$$

είναι

$$e^{af}u(f)$$

Λύση:

i. Λάθος. Η πολική μορφή του είναι $3e^{j\pi}$.

ii. Σωστό. Ισχύει $X_1 = X_{-1}^*$, που είναι ιδιότητα των πραγματικών σημάτων.

iii. Λάθος. Οι χαρακτηριστικές ρίζες (εκθέτες των όρων της κρουστικής απόκρισης) είναι αρνητικές, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

iv. Λάθος. Έχει δυο πραγματικές ρίζες, $z_1 = -2$, $z_2 = -1$. Εναλλακτικά, επειδή κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να ιδωθεί ως μιγαδικός με μηδενικό φανταστικό μέρος, η πρόταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί και ως "Σωστή", αν εξηγηθεί επαρκώς.

v. Λάθος. Από την ιδιότητα της δυικότητας

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \tag{2}$$

$$\frac{1}{a + j2\pi t} \longleftrightarrow e^{af}u(-f) \tag{3}$$

Θέμα 2 - Βαθμός: 20
Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = \frac{t}{4 - \sin(x(t))} \tag{4}$$

είναι

(α') (**5 μ.**) γραμμικό,

(β') (**5 μ.**) χρονικά αμετάβλητο,

(γ') (**5 μ.**) ευσταθές,

(δ') (**2.5 μ.**) αιτιατό, και

(ε') (**2.5 μ.**) δυναμικό

Λύση:

- Για να είναι το σύστημα γραμμικό πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό. Το σύστημα δεν είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος είναι

$$y_{x(t):=ax(t)}(t) = \frac{t}{4 - \sin(ax(t))} \neq a\frac{t}{4 - \sin(x(t))} \tag{5}$$

  και άρα δεν είναι ομογένές και αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι γραμμικό.

- Δεν είναι Χ.Α. γιατί για είσοδο $x(t - t_0)$ η έξοδος είναι

$$y_{x(t):=x(t-t_0)}(t) = \frac{t}{4 - \sin(x(t - t_0))} \tag{6}$$

  και η καθυστερημένη έξοδος κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = \frac{t - t_0}{4 - \sin(x(t - t_0))} \tag{7}$$

  Οι δυο έξοδοι δεν είναι ίδιες οπότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Το σύστημα είναι ασταθές γιατί για

$$|x(t)| < B_x \Longrightarrow |y(t)| = \frac{|t|}{|4 - \sin(x(t))|} \leq \frac{|t|}{|4 - 1|} = \frac{|t|}{3} \to +\infty \tag{8}$$

  όταν $t \to +\infty$, γιατί

$$|\sin(x(t))| \leq 1,\ \forall x(t) \tag{9}$$

- Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου και όχι από μελλοντικές.

- Δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθηκευση άλλων χρονικών στιγμών (μελλοντικών ή παρελθοντικών) της εισόδου ή της εξόδου.

Θέμα 3 - Βαθμός: 25

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3}{4}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{8}y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \tag{10}$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$.

(α΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β΄) **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

(γ΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} \tag{11}$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$. Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/4}, \;\; t > 0 \tag{12}$$

Από τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \tag{13}$$

$$y'_{zi}(0^-) = 0 \tag{14}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \tag{15}$$

$$y'_{zi}(0^-) = -\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}c_2 = 0 \tag{16}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = -1 \tag{17}$$

$$c_2 = 2 \tag{18}$$

Οπότε

$$y_{zi}(t) = \Big[- e^{-t/2} + 2e^{-t/4}\Big]u(t) \tag{19}$$

(β΄) Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3}{4}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{8}y(t) = x(t) \tag{20}$$

με κρουστική απόκριση $h_o(t)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} \tag{21}$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι - όπως πριν - οι $\lambda_1 = -1/2$ και $\lambda_2 = -1/4$. Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/4},\ \ t > 0 \tag{22}$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι οι

$$h_o(0^+) = 0 \tag{23}$$
$$h_o'(0^+) = 1 \tag{24}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{25}$$
$$h_o'(0^+) = -\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}c_2 = 1 \tag{26}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = -4 \tag{27}$$
$$c_2 = 4 \tag{28}$$

Οπότε

$$h_o(t) = -4e^{-t/2} + 4e^{-t/4},\ \ t > 0 \tag{29}$$

Για το δοθέν στην εκφώνηση σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_o(t) + \frac{d}{dt}h_o(t) = (3e^{-t/4} - 2e^{-t/2})u(t) \tag{30}$$

(γ') Θα είναι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = (\delta(t) - \delta(t-2)) * (3e^{-t/4} - 2e^{-t/2})u(t) \tag{31}$$
$$= (3e^{-t/4} - 2e^{-t/2})u(t) - (3e^{-(t-2)/4} - 2e^{-(t-2)/2})u(t-2) \tag{32}$$

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της συνέλιξης, που δίνει

$$y_z s(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (3e^{-\tau/4} - 2e^{-\tau/2})u(\tau)(\delta(t-\tau) - \delta(t-\tau-2)d\tau \tag{33}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (3e^{-\tau/4} - 2e^{-\tau/2})u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} (3e^{-\tau/4} - 2e^{-\tau/2})u(\tau)\delta(t-\tau-2)d\tau \tag{34}$$
$$= (3e^{-\tau/4} - 2e^{-\tau/2})u(\tau)\Big|_{\tau=t} - (3e^{-\tau/4} - 2e^{-\tau/2})u(\tau)\Big|_{\tau=t-2} \tag{35}$$
$$= (3e^{-t/4} - 2e^{-t/2})u(t) - (3e^{-(t-2)/4} - 2e^{-(t-2)/2})u(t-2) \tag{36}$$

από την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \tag{37}$$

Θέμα 4 - Βαθμός: 25

Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 2$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = |t|, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \tag{38}$$

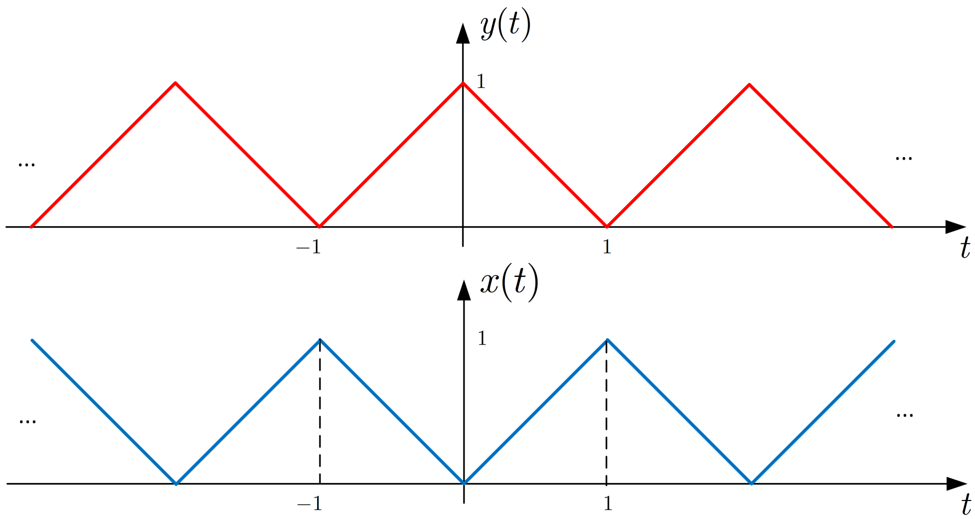
οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_0 = \frac{1}{2}, \quad X_k = -\frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττά} \tag{39}$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ορισμό, ιδιότητες, ή/και *οποιαδήποτε* ζεύγη έτοιμων συντελεστών Fourier έχουμε δει στο μάθημα.

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ είναι ένας περιοδικός τριγωνικός παλμός $y(t)$ - όπως τον έχουμε δει στις διαλέξεις και φαίνεται και στο Σχήμα 1 - μετατοπισμένος προς τα δεξιά κατά μισή περίοδο, όπως στο Σχήμα 1 ξανά.



Σχήμα 1: *Σήματα Θέματος 4.*

Οι συντελεστές του σήματος $y(t)$ είναι γνωστοί από τις διαλέξεις ως

$$Y_k = \frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττά} \tag{40}$$

Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$x(t) = y\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \longleftrightarrow Y_k e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = Y_k e^{-j\pi k} = Y_k(-1)^k \tag{41}$$

Αρα οι συντελεστές του περιοδικού σήματος της εκφώνησης θα είναι

$$X_k = Y_k(-1)^k = \frac{2}{\pi^2 k^2}(-1)^k, \quad k \text{ περιττά} \tag{42}$$

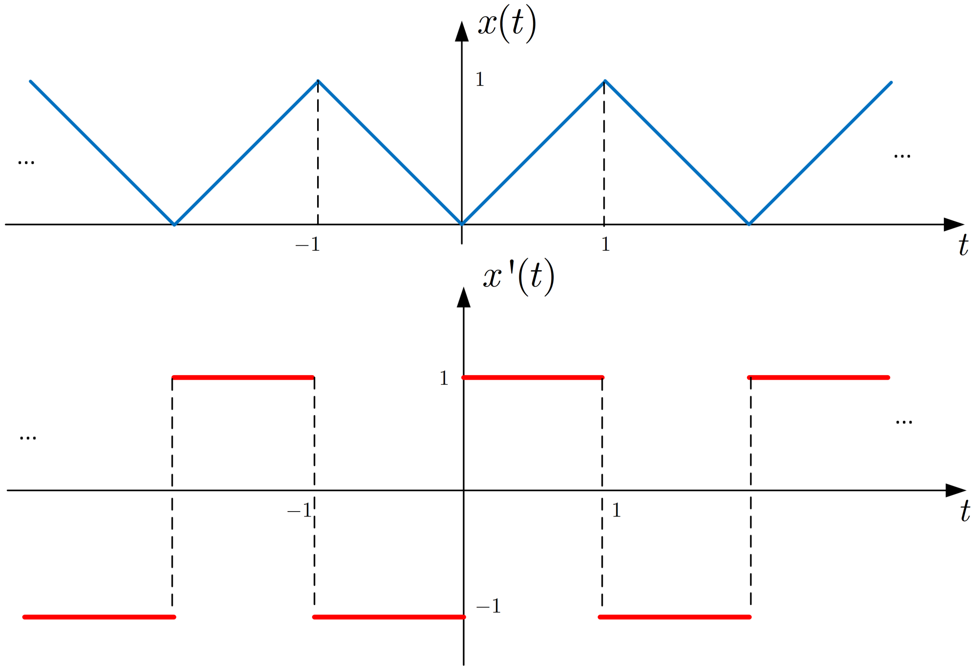
Αφού $(-1)^k = -1$ για k περιττά, έχουμε

$$X_k = -\frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττά} \tag{43}$$

Για $k = 0$, έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-t)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} tdt = \frac{1}{2}\left(\frac{-t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{1}\right) = \frac{1}{2} \tag{44}$$

Εναλλακτική λύση: Η παράγωγος του περιοδικού σήματος φαίνεται στο Σχήμα 2, με το πλάτος των παλμών να προκύπτει από το συντελεστή διεύθυνσης των ευθυγράμμων τμημάτων που απαρτίζουν τον περιοδικό τριγωνικό παλμό. Το σήμα παραγώγου $x'(t)$ μας είναι γνωστό από τις διαλέξεις, και έχει συντελεστές Fourier



Σχήμα 2: *Περιοδικό σήμα και παράγωγός του: Θέμα 4.*

$$X_k^d = \frac{2}{\pi k}e^{-j\pi/2}, \;\; k \text{ περιττά} \tag{45}$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης/ολοκλήρωσης, λαμβάνοντας υπ'όψη ότι $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$, οι συντελεστές Fourier του δοθέντος περιοδικού σήματος θα είναι

$$X_k = \frac{X_k^d}{j2\pi k f_0} = \frac{2}{(j2\pi k f_0)\pi k}e^{-j\pi/2} = \frac{2}{(j\pi k)\pi k}e^{-j\pi/2} = \frac{2}{\pi^2 k^2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/2} = \frac{2}{\pi^2 k^2}e^{j\pi} = -\frac{2}{\pi^2 k^2}, \;\; k \text{ περιττά} \tag{46}$$

γιατί $1/j = -j = e^{-j\pi/2}$. Ο συντελεστής X_0 υπολογίζεται ξανά ξεχωριστά όπως πριν.

Εναλλακτική λύση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και το τυπολόγιο:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-1}^{0}(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{1} te^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-t)e^{-j\pi k t}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} te^{-j\pi k t}dt \tag{48}$$

Από τυπολόγιο ξέρουμε ότι

$$\int_{a}^{b} te^{-ct}dt = e^{-ct}\left(\frac{-ct-1}{c^2}\right)\Big|_{a}^{b} \tag{49}$$

κι έτσι, επειδή $e^{\pm j\pi k} = (-1)^k$,

$$X_k = -\frac{1}{2}e^{-j\pi kt}\left(\frac{-j\pi kt - 1}{(j\pi k)^2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}e^{-j\pi kt}\left(\frac{-j\pi kt - 1}{(j\pi k)^2}\right)\Big|_{0}^{1} \tag{50}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2k^2} - e^{j\pi k}\left(\frac{j\pi k - 1}{(j\pi k)^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-j\pi k}\left(\frac{-j\pi k - 1}{(j\pi k)^2}\right) - \frac{1}{\pi^2k^2}\right) \tag{51}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2k^2} - (-1)^k\left(\frac{j\pi k - 1}{(j\pi k)^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left((-1)^k\left(\frac{-j\pi k - 1}{(j\pi k)^2}\right) - \frac{1}{\pi^2k^2}\right) \tag{52}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2k^2} + (-1)^k\left(\frac{j\pi k - 1}{\pi^2k^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left((-1)^k\left(\frac{j\pi k + 1}{\pi^2k^2}\right) - \frac{1}{\pi^2k^2}\right) \tag{53}$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2k^2} - \frac{1}{2}(-1)^k\frac{j\pi k}{\pi^2k^2} + \frac{1}{2}(-1)^k\frac{1}{\pi^2k^2} + \frac{1}{2}(-1)^k\frac{j\pi k}{\pi^2k^2} + \frac{1}{2}(-1)^k\frac{1}{\pi^2k^2} - \frac{1}{2\pi^2k^2} \tag{54}$$

$$= -\frac{1}{\pi^2k^2} + (-1)^k\frac{1}{\pi^2k^2} \tag{55}$$

$$= -\frac{1}{\pi^2k^2}(1 - (-1)^k) \tag{56}$$

Για k περιττά, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$X_k = -\frac{2}{\pi^2k^2},\ \ k \text{ περιττά} \tag{57}$$

Θέμα 5 - Βαθμός: 30

Θεωρήστε μια μόνο περίοδο από το περιοδικό σήμα του προηγούμενου Θέματος, δηλ. θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = |t|,\ \ -1 < t < 1 \tag{58}$$

$$= |t|\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \tag{59}$$

Δείξτε ότι ο Μετασχ. Fourier του είναι

$$X(f) = 2\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) \tag{60}$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ορισμό, ιδιότητες, ή/και *οποιαδήποτε* ζεύγη έτοιμων μετασχηματισμών Fourier έχουμε δει στο μάθημα.

Λύση:

Αν σχεδιάσουμε το σήμα και το παραγωγίσουμε, θα πάρουμε τα σήματα του Σχήματος 3. Η παράγωγος μπορεί να γραφεί ως

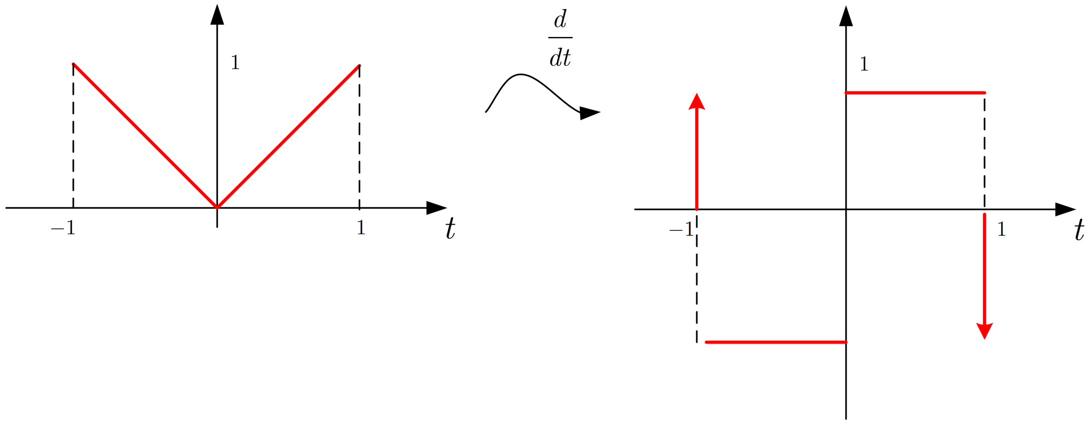
$$\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t+1) - \mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) - \delta(t-1) \tag{61}$$

Ο μετασχ. Fourier του θα είναι (από πίνακες)

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = e^{j2\pi f} - \mathrm{sinc}(f)e^{j\pi f} + \mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f} - e^{-j\pi f} \tag{62}$$

$$= 2j\sin(2\pi f) - \mathrm{sinc}(f)(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}) \tag{63}$$

$$= 2j\sin(2\pi f) - \mathrm{sinc}(f)2j\sin(\pi f) \tag{64}$$



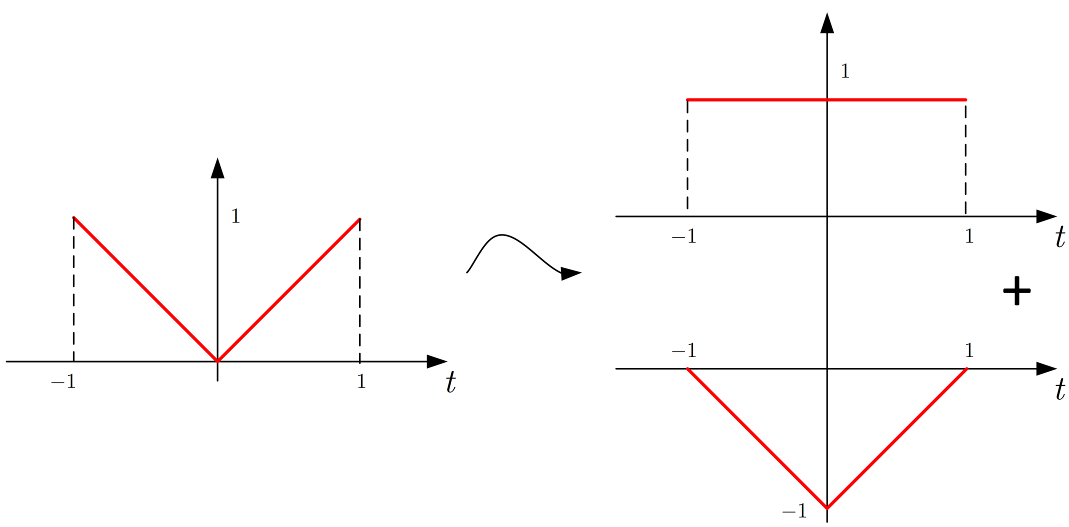
Σχήμα 3: *Σήμα και παράγωγος Θέματος 5.*

$$= 2j(\sin(2\pi f) - \text{sinc}(f)\sin(\pi f)) \quad (65)$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης

$$j2\pi f X(f) = 2j(\sin(2\pi f) - \text{sinc}(f)\sin(\pi f)) \quad (66)$$
$$\pi f X(f) = \sin(2\pi f) - \text{sinc}(f)\sin(\pi f) \quad (67)$$
$$X(f) = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} - \text{sinc}(f)\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \quad (68)$$
$$= 2\text{sinc}(2f) - \text{sinc}^2(f) \quad (69)$$

Εναλλακτική λύση: Μπορούμε να διασπάσουμε το σήμα σε δυο γνωστα μας σήματα, όπως στο Σχήμα 4. Τα



Σχήμα 4: *Διάσπαση σηματος Θέματος 5.*

σήματα αυτά είναι γνωστά από τους πίνακες μας και μαζί με το μετασχ. Fourier τους γράφονται ως

$$x_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \longleftrightarrow X_1(f) = 2\text{sinc}(2f) \quad (70)$$
$$x_2(t) = -\text{tri}(t) \longleftrightarrow X_2(f) = -\text{sinc}^2(f) \quad (71)$$

οπότε το δοθέν σήμα θα έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = 2\text{sinc}(2f) - \text{sinc}^2(f) \quad (72)$$

<u>Εναλλακτική λύση:</u> Μπορούμε να γράψουμε το σήμα σπάζοντάς το σε δυο μέρη, το τμήμα του που βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα και αυτό που βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα, δηλ.

$$x(t) = -t\text{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right) + t\text{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) \tag{73}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα να έχουμε

$$\begin{aligned}
X(f) &= -\frac{j}{2\pi}\left(\frac{d}{df}F\left\{\text{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right)\right\} - \frac{d}{df}F\left\{\text{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right)\right\}\right) &(74)\\
&= -\frac{j}{2\pi}\left(\frac{d}{df}\left(\text{sinc}(f)e^{j\pi f}\right) - \frac{d}{df}\left(\text{sinc}(f)e^{-j\pi f}\right)\right) &(75)\\
&= -\frac{j}{2\pi}\left(\frac{d}{df}\left(\text{sinc}(f)2j\sin(\pi f)\right)\right) &(76)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{d}{df}\left(\text{sinc}(f)\sin(\pi f)\right)\right) &(77)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{d}{df}\left(\frac{\sin^2(\pi f)}{\pi f}\right)\right) &(78)\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^2 f\sin(\pi f)\cos(\pi f) - \pi\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} &(79)\\
&= \frac{2\pi f\sin(\pi f)\cos(\pi f) - \sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} &(80)\\
&= \frac{2\pi f\sin(\pi f)\cos(\pi f)}{\pi^2 f^2} - \text{sinc}^2(f) &(81)\\
&= \frac{2\sin(\pi f)\cos(\pi f)}{\pi f} - \text{sinc}^2(f) &(82)
\end{aligned}$$

κι επειδή

$$2\sin(\pi f)\cos(\pi f) = \sin(2\pi f) \tag{83}$$

εχουμε

$$X(f) = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} - \text{sinc}^2(f) = \frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f} - \text{sinc}^2(f) = 2\text{sinc}(2f) - \text{sinc}^2(f) \tag{84}$$

<u>Εναλλακτική λύση:</u> Μπορούμε - με περισσότερο κόπο - να αναπτύξουμε την απόλυτη τιμή ως

$$x(t) = |t|\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} t\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right), & t > 0 \\ -t\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right), & t < 0 \end{cases} = t\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)u(t) - t\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)u(-t) \tag{85}$$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι

$$\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)u(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \cdot \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) \tag{86}$$

Αντίστοιχα,

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)u(-t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \cdot \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} = \mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right) \tag{87}$$

οπότε

$$x(t) = -t\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{1}\right) + t\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) \tag{88}$$

και συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη λύση.

Εναλλακτική λύση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και το τυπολόγιο:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-1}^{0}(-t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{1} te^{-j2\pi ft}dt \tag{89}$$

Από τυπολόγιο ξέρουμε ότι

$$\int_a^b te^{-ct}dt = e^{-ct}\left(\frac{-ct-1}{c^2}\right)\Big|_a^b \tag{90}$$

οπότε

$$\begin{aligned} X(f) &= -e^{-j2\pi ft}\left(\frac{-j2\pi ft-1}{(j2\pi f)^2}\right)\Big|_{-1}^{0} + e^{-j2\pi ft}\left(\frac{-j2\pi ft-1}{(j2\pi f)^2}\right)\Big|_{0}^{1} && (91)\\ &= -\frac{-1}{-4\pi^2 f^2} + e^{j2\pi f}\left(\frac{j2\pi f-1}{-4\pi^2 f^2}\right) + e^{-j2\pi f}\left(\frac{-j2\pi f-1}{-4\pi^2 f^2}\right) - \frac{-1}{-4\pi^2 f^2} && (92)\\ &= -\frac{1}{4\pi^2 f^2} - j2\pi f e^{j2\pi f}\frac{1}{4\pi^2 f^2} + e^{j2\pi f}\frac{1}{4\pi^2 f^2} + j2\pi f e^{-j2\pi f}\frac{1}{4\pi^2 f^2} + e^{-j2\pi f}\frac{1}{4\pi^2 f^2} - \frac{1}{4\pi^2 f^2} && (93)\\ &= \frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(-1 - j2\pi f e^{j2\pi f} + e^{j2\pi f} + j2\pi f e^{-j2\pi f} + e^{-j2\pi f} - 1\right) && (94)\\ &= \frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(-2 + j2\pi f(e^{-j2\pi f} - e^{j2\pi f}) + (e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f})\right) && (95)\\ &= \frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(-2 - j2\pi f 2j\sin(2\pi f) + 2\cos(2\pi f)\right) && (96)\\ &= \frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(4\pi f\sin(2\pi f) + 2(\cos(2\pi f) - 1)\right) && (97) \end{aligned}$$

κι επειδή

$$\cos(2x) - 1 = -2\sin^2(x) \tag{98}$$

έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(4\pi f\sin(2\pi f) - 4\sin^2(\pi f)\right) && (99)\\ &= \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} - \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} && (100)\\ &= 2\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) && (101) \end{aligned}$$