

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Εξέταση Προόδου

Θέμα 1 - Βαθμός: 20

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{2 + \cos(x(t))} \quad (1)$$

είναι γραμμικό (**5 μ.**), χρονικά αμετάβλητο (**5 μ.**), ευσταθές (**5 μ.**), αιτιατό (**2.5 μ.**), και δυναμικό (**2.5 μ.**).

Λύση:

- Για να είναι το σύστημα γραμμικό πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό. Το σύστημα δεν είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=ax(t)}(t) = \frac{1}{2 + \cos(ax(t))} \neq a \frac{1}{2 + \cos(x(t))} \quad (2)$$

και άρα δεν είναι ομογενές και αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι γραμμικό.

- Είναι Χ.Α. γιατί για είσοδο $x(t - t_0)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=x(t-t_0)}(t) = \frac{1}{2 + \cos(x(t - t_0))} \quad (3)$$

και η καθυστερημένη έξοδος κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = \frac{1}{2 + \cos(x(t - t_0))} \quad (4)$$

Οι δυο έξοδοι είναι ίδιες οπότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί για $|x(t)| < B_x \implies |y(t)| = \frac{1}{|2 + \cos(x(t))|} \leq \frac{1}{|2-1|} = 1$, γιατί $|\cos(x(t))| \leq 1, \forall x(t)$.
- Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου και όχι από μελλοντικές.
- Δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθήκευση άλλων χρονικών στιγμών (μελλοντικών ή παρελθοντικών) της εισόδου ή της εξόδου.

Θέμα 2 - Βαθμός: 30

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \quad (5)$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1, \frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$.

(α) **(5 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β) **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

(γ) **(15 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

Λύση:

(α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (6)$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t, \quad t > 0 \quad (7)$$

Από τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \quad (8)$$

$$y'_{zi}(0^-) = 0 \quad (9)$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \quad (10)$$

$$y'_{zi}(0^-) = -c_1 + c_2 = 0 \quad (11)$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad (12)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \quad (13)$$

Οπότε

$$y_{zi}(t) = \left[\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t \right] u(t) \quad (14)$$

(β) Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - y(t) = x(t) \quad (15)$$

με κρουστική απόκριση $h_o(t)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (16)$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t, \quad t > 0 \quad (17)$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι οι

$$h_o(0^+) = 0 \quad (18)$$

$$h'_o(0^+) = 1 \quad (19)$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \quad (20)$$

$$h'_o(0^+) = -c_1 + c_2 = 1 \quad (21)$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = -\frac{1}{2} \quad (22)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \quad (23)$$

Οπότε

$$h_o(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t, \quad t > 0 \quad (24)$$

Για το δοθέν στην εκφώνηση σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_o(t) + \frac{d}{dt}h_o(t) = e^t u(t) \quad (25)$$

(γ) Θα είναι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^\tau u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (26)$$

Όμως

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1 \quad (27)$$

για $0 < \tau < t$, οπότε

$$y(t) = \int_0^t e^\tau d\tau = e^\tau \Big|_0^t = e^t - 1 \quad (28)$$

για $t > 0$, οπότε

$$y_{zs}(t) = (e^t - 1)u(t) \quad (29)$$

Θέμα 3 - Βαθμός: 30

Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 1$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} < t < 1 \end{cases} \quad (30)$$

οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_0 = \frac{5}{6}, \quad X_k = -\frac{1}{2\pi k}(-1)^k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (31)$$

Λύση:

Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \int_0^{1/3} dt + \frac{1}{2} \int_{1/3}^{2/3} dt + \int_{2/3}^1 dt \quad (32)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) + 1 - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \quad (33)$$

και

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_0^{1/3} e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{2} \int_{1/3}^{2/3} e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \int_{2/3}^1 e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (34)$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k f_0} \left(e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{1/3} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{1/3}^{2/3} + e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{2/3}^1 \right) \quad (35)$$

κι επειδή $f_0 = 1/T_0 = 1$ Hz, έχουμε

$$X_k = \frac{1}{-j2\pi k} \left(e^{-j2\pi k t} \Big|_0^{1/3} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi k t} \Big|_{1/3}^{2/3} + e^{-j2\pi k t} \Big|_{2/3}^1 \right) \quad (36)$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k} \left(e^{-j2\pi k/3} - 1 + \frac{1}{2} e^{-j4\pi k/3} - \frac{1}{2} e^{-j2\pi k/3} + 1 - e^{-j4\pi k/3} \right) \quad (37)$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k} e^{-j\pi k} \left(\frac{1}{2} e^{j\pi k/3} - \frac{1}{2} e^{-j\pi k/3} \right) \quad (38)$$

$$= -\frac{1}{2\pi k} (-1)^k \sin \left(\frac{\pi k}{3} \right) \quad (39)$$

Θέμα 4 - Βαθμός: 25

Ας συμβολίσουμε το γνωστό μας περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \quad (40)$$

ως

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \quad (41)$$

Αν γνωρίζετε ότι το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{\frac{1}{2}} \right) * 3\delta_3(t) \quad (42)$$

έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = \alpha \frac{\sin \left(\frac{\pi k}{\beta} \right)}{\pi k} \quad (43)$$

τότε

(α) (10 μ.) δείξτε ότι

$$x(t) = 3 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - 3k}{\frac{1}{2}} \right) \quad (44)$$

(β) (5 μ.) σχεδιάστε μερικές (δυο-τρεις) περιόδους από το σήμα $x(t)$

(γ) (10 μ.) βρείτε τις σταθερές α , β .

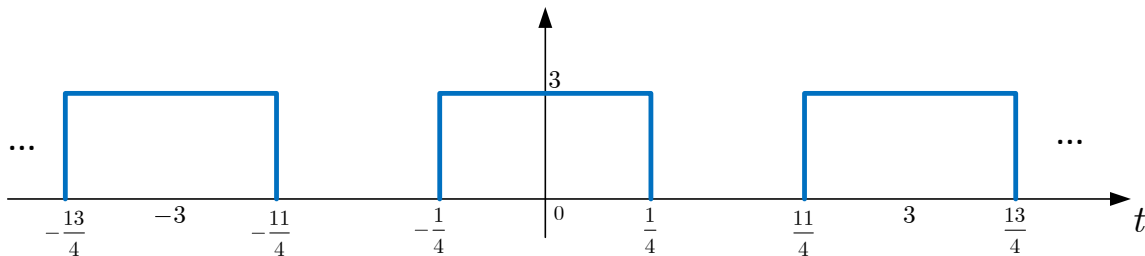
Λύση:

(α) Από τις ιδιότητες συνέλιξης, το περιοδικό σήμα $x(t)$ γράφεται ως

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * 3\delta_3(t) = 3\text{rect}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k) = 3 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-3k}{\frac{1}{2}}\right) \quad (45)$$

το οποίο αναπαριστά έναν τετραγωνικό παλμό διάρκειας 0.5 και πλάτους 3, περιοδικά επαναλαμβανόμενο ανά $T_0 = 3$.

(β) Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Περιοδικό σήμα Θέματος 5.

(γ) Οι συντελεστές του δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{3} \int_{-1/4}^{1/4} 3e^{-j2\pi k/3t} dt = \frac{1}{3} \frac{3}{(-j2\pi k/3)} e^{-j2\pi(k/3)t} \Big|_{-1/4}^{1/4} \quad (46)$$

$$= \frac{3}{-j2\pi k} (e^{-j2\pi k/12} - e^{j2\pi k/12}) = \frac{3}{-j2\pi k} (-2j \sin(\pi k/6)) = \frac{3}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{6}\right) \quad (47)$$

Συγκρίνοντας με τη σχέση

$$X_k = \alpha \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{\beta}\right)}{\pi k} \quad (48)$$

παρατηρούμε ότι

$$\alpha = 3, \quad \beta = 6 \quad (49)$$

Θέμα 5 - Βαθμός: 25

Έστω ένα **περιοδικό, άρτιο, πραγματικό** σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0 = \frac{1}{400}$ s, το οποίο αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k . Σας δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία:

- $X_k = 0, |k| > 3$
- $X_2 = 2X_3$

- $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{5}{32}$
- $\int_{T_0} x(t) dt = 0$
- $\int_{T_0} x(t) e^{-j\pi 800t} dt = 0$

Βρείτε τις πιθανές μορφές του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Αφού $x(t)$ πραγματικό, θα ισχύει ότι

$$X_{-k} = X_k^* \implies |X_{-k}|^2 = |X_k^*|^2 = |X_k|^2 \quad (50)$$

Επίσης οι συντελεστές X_k με $|k| > 3$ είναι μηδενικοί, και λόγω αριτιότητας, οι συντελεστές X_k είναι πραγματικοί αριθμοί (όχι μιγαδικοί).

Οπότε από θεώρημα Parseval

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2 + 2|X_3|^2 = \frac{5}{32} \quad (51)$$

Όμως

$$\int_{T_0} x(t) dt = 0 \iff \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = 0 \iff X_0 = 0 \quad (52)$$

και άρα

$$P_x = 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2 + 2|X_3|^2 = \frac{5}{32} \iff |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 = \frac{5}{64} \quad (53)$$

Επειδή

$$X_2 = 2X_3 \implies |X_2|^2 = 4|X_3|^2 \quad (54)$$

και

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j\pi 800t} dt = 0 \iff X_1 = 0 \quad (55)$$

έχουμε

$$|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 = \frac{5}{64} \iff 4|X_3|^2 + |X_3|^2 = \frac{5}{64} \iff |X_3|^2 = \frac{1}{64} \implies |X_3| = \frac{1}{8} \implies X_3 = \pm \frac{1}{8} \quad (56)$$

Κατά συνέπεια

$$X_2 = 2X_3 = \pm 2\frac{1}{8} = \pm \frac{1}{4} \quad (57)$$

Άρα τελικά

$$x(t) = \pm \frac{1}{4} e^{-j2\pi 2f_0 t} \pm \frac{1}{4} e^{-j2\pi 2f_0 t} \pm \frac{1}{8} e^{-j2\pi 3f_0 t} \pm \frac{1}{8} e^{j2\pi f_0 t} = \pm \frac{1}{2} \cos(2\pi 2f_0 t) \pm \frac{1}{4} \cos(2\pi 3f_0 t) \quad (58)$$

$$= \pm \frac{1}{2} \cos(2\pi 800t) \pm \frac{1}{4} \cos(2\pi 1200t) \quad (59)$$