ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Εξέταση Προόδου

Άσκηση 1 - Βαθμός: 15

Ελέγξτε αν το παρακάτω σύστημα είναι γραμμικό (**5 μ.**), χρονικά αμετάβλητο (**2.5 μ.**), ευσταθές (**2.5 μ.**), αιτιατό (**2.5 μ.**), και δυναμικό (**2.5 μ.**)

$$y(t) = (2 + \sin(t))x(t) \tag{1}$$

Λύση:

- Για να είναι το σύστημα γραμμικό πρέπει να είναι ομογενές και αθροιστικό. Το σύστημα είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=ax(t)}(t) = (2 + \sin(t))ax(t) = a(2 + \sin(t))x(t) = ay(t) \tag{2}$$

και άρα είναι ομογένές. Επίσης είναι αθροιστικό γιατί για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=x_1(t)+x_2(t)} = (2 + \sin(t))(x_1(t) + x_2(t)) = (2 + \sin(t))x_1(t) + (2 + \sin(t))x_2(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{3}$$

Άρα είναι γραμμικό.

- Δεν είναι Χ.Α. γιατί για είσοδο $x(t - t_0)$ η έξοδος είναι

$$y_{x:=x(t-t_0)}(t) = (2 + \sin(t))x(t - t_0) \tag{4}$$

ενώ η καθυστερημένη έξοδος κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = (2 + \sin(t - t_0))x_1(t - t_0) \tag{5}$$

Οι δυο έξοδοι δεν είναι ίδιες οπότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί για $|x(t)| < B \Longrightarrow |y(t)| = |2 + \sin(t)||x(t)| < |2 + \sin(t)|B \leq 3B$.
- Είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου και όχιαπό μελλοντικές.
- Δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για την αποθηκευση άλλων χρονικών στιγμών (μελλοντικών ή παρελθοντικών) της εισόδου ή της εξόδου.

Άσκηση 2 - Βαθμός: 30

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 16y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \tag{6}$$

και έχει αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = -1$.

i. (**5 μ.**) Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

ii. **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική του απόκριση, $h(t)$.

iii. **(15 μ.)** Βρείτε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για $x(t) = u(t)$.

Λύση:

i. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 + 16 = 0 \tag{7}$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = j4$ και $\lambda_2 = -j4$. Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{j4t} + c_2 e^{-j4t}, \;\; t > 0 \tag{8}$$

Από τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = 1 \tag{9}$$
$$y'_{zi}(0^-) = -1 \tag{10}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \tag{11}$$
$$y'_{zi}(0^-) = j4c_1 - j4c_2 = -1 \tag{12}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{8} \tag{13}$$
$$c_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{8} \tag{14}$$

Οπότε

$$y_{zi}(t) = \left[\left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{8}\right)e^{j4t} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{8}\right)e^{-j4t}\right]u(t) \tag{15}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα θεωρείται σωστό αλλα μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο ως

$$y_{zi}(t) = \left[\frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + j\frac{1}{8}e^{j4t} - j\frac{1}{8}e^{-j4t}\right]u(t) = \left[\cos(4t) - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]u(t) \tag{16}$$

ii. Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 16y(t) = x(t) \tag{17}$$

με κρουστική απόκριση $h_o(t)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda^2 + 16 = 0 \tag{18}$$

και άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = j4$ και $\lambda_2 = -j4$. Οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = c_1 e^{j4t} + c_2 e^{-j4t}, \;\; t > 0 \tag{19}$$

Οι ψευδοαρχικές συνθήκες που εισάγει η συνάρτηση Δέλτα είναι οι

$$h_o(0^+) = 0 \tag{20}$$
$$h'_o(0^+) = 1 \tag{21}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$h_o(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{22}$$
$$h'_o(0^+) = j4c_1 - j4c_2 = 1 \tag{23}$$

και λύνοντάς το έχουμε

$$c_1 = \frac{1}{j8} = -\frac{j}{8} \tag{24}$$
$$c_2 = -\frac{1}{j8} = \frac{j}{8} \tag{25}$$

Οπότε

$$h_o(t) = -\frac{j}{8}e^{j4t} + \frac{j}{8}e^{-j4t}, \ \ t > 0 \tag{26}$$

Η παραπάνω απάντηση θεωρείται σωστή αλλά απλοποιείται περαιτέρω:

$$h_o(t) = \frac{1}{4}\sin(4t)u(t) \tag{27}$$

Για το δοθέν στην εκφώνηση σύστημα, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = h_o(t) + \frac{d}{dt}h_o(t) = \Big[\frac{1}{4}\sin(4t) + \cos(4t)\Big]u(t) \tag{28}$$

Έκφραση της $h(t)$ με χρήση της Σχέσης (26) και της παραγώγου της θεωρείται σωστή.

iii. Θα είναι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{1}{4}\sin(4\tau) + \cos(4\tau)\Big]u(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{29}$$

Όμως

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1 \tag{30}$$

για $0 < \tau < t$, οπότε

$$y(t) = \int_0^t \Big[\frac{1}{4}\sin(4\tau) + \cos(4\tau)\Big]d\tau = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\sin(4t) - \frac{1}{16}\cos(4t) \tag{31}$$

για $t > 0$, οπότε

$$y_{zs}(t) = \Big[\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\sin(4t) - \frac{1}{16}\cos(4t)\Big]u(t) \tag{32}$$

Έκφραση της παραπάνω σχέσης με μιγαδικά εκθετικά λόγω διαφορετικών απαντήσεων στο ερώτημα (ii.) θεωρείται σωστή (αρκεί να είναι!).

Άσκηση 3 - Βαθμός: 15

Ενα *πραγματικό* περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$X_k = [2e^{-j\pi/3}, 3e^{j\pi/4}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi}, 2e^{-j\pi/4}] \tag{33}$$

για $k = 1, 2, 3, 4, 5$ αντίστοιχα, και $X_0 = 3$. Πόση είναι η ισχύς του σήματος (**10 μ.**) και τι ποσοστό της ισχύος αυτής βρίσκεται στα 2 πρώτα ***ημίτονα*** ($k = 1, \ k = 2$) της σειράς Fourier (**5 μ.**);

Λύση:
Από το θεώρημα του Parseval έχουμε ότι

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \tag{34}$$

Το σήμα είναι πραγματικό, οπότε θα έχει και αρνητικά k για τα οποία θα ισχύει ότι $X_k^* = X_{-k}$, κι επειδή για κάθε μιγαδικό αριθμό $Ae^{j\theta}$ ισχύει ότι $|Ae^{j\theta}| = |A|$, θα είναι

$$P_x = |X_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 = 3^2 + 2[2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2] = 9 + 2(4 + 9 + 1 + 1 + 4) = 9 + 38 = 47 \tag{35}$$

Τα δυο πρώτα ημίτονα σχηματίζονται από τα εκθετικά με συντελεστές $X_{-1} = X_1^*, X_{-2} = X_2^*, X_1, X_2$, κι άρα έχουν ισχύ

$$P_{1,2} = \sum_{k=-2,k\neq 0}^{2} |X_k|^2 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 = 4 + 9 + 9 + 4 = 26 \tag{36}$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\rho = \frac{P_{1,2}}{P_x} = \frac{26}{47} = 0.553 \text{ ή } 55.3\% \tag{37}$$

Άσκηση 4 - Βαθμός: 30
Δείξτε ότι για το περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο σε μια περίοδο $T_0 = 2$ δίνεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \tag{38}$$

οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2 + j2\pi k}, \ \forall \ k \in \mathrm{Z} \tag{39}$$

Λύση:
Γνωρίζουμε τις σχέσεις

$$f_0 T_0 = 1 \tag{40}$$
$$e^{\pm j\pi k} = (-1)^k \tag{41}$$

Είναι

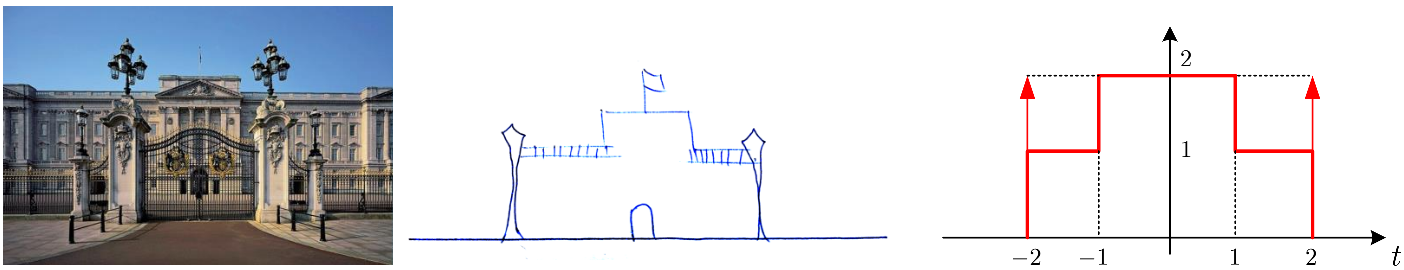
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^1 e^{-t}e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{42}$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_0^1 e^{-t(1+j2\pi k f_0)}dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{[-(1 + j2\pi k f_0)]}e^{-t(1+j2\pi k f_0)}\Big|_0^1 \tag{43}$$
$$= -\frac{1}{T0 + j2\pi k f_0 T_0}(e^{-(1+j2\pi k f_0)} - 1) \tag{44}$$

και για $T_0 = 2 \Longrightarrow f_0 = 1/2$, μαζί με τη σχέση (41)

$$X_k = -\frac{1}{2 + j2\pi k}(e^{-(1+j\pi k)} - 1) = \frac{1}{2 + j2\pi k}(1 - e^{-1}e^{-j\pi k}) = \frac{1 - e^{-1}(-1)^k}{2 + j2\pi k} \tag{45}$$

Παρατηρώ ότι για $k = 0$ δεν υπάρχει κάποια απροσδιοριστία στους συντελεστές, οπότε δε χρειάζεται να το βρω ξεχωριστά.

Άσκηση 5 - Βαθμός: 25
Ο φίλος σας πήγε διακοπές στο Ηνωμένο Βασίλειο, και μεταξύ άλλων φωτογράφισε το παλάτι του Buckingham, όπως στο Σχήμα 1(α). Ο μικρός του αδελφός προσπάθησε να το ζωγραφίσει, αλλά το άφησε στη μέση - Σχήμα 1(β). Εσείς είδατε το ημιτελές σχέδιο και επειδή έχετε διαβάσει πολύ για το HY215, κάθε ζωγραφία τη βλέπετε ως σήμα! Βρείτε το Μετασχηματισμό Fourier του παλατιού-σήματος του Σχήματος 1(γ).



(α) (β) (γ)

Σχήμα 1: *Παλάτι του Buckingham σε διάφορες "εκδόσεις".*

<u>Hint:</u> "Σπάστε" το σήμα σας σε γνωστά υποσήματα, βρείτε ξεχωριστά το μετασχ. Fourier τους, και αθροίστε τα αποτελέσματα που παίρνετε.

<u>Λύση:</u>
Η παρακάτω λύση είναι μια από τις πιθανές και χρησιμοποιεί τον ορισμό, "διατρέχοντας" το σήμα από αριστερά προς τα δεξιά, και διασπώντας το σε:

- μια συνάρτηση δέλτα στο $t_0 = -2$ με συντελεστή 2
- έναν παλμό στο $(-2, -1)$ με πλάτος 1
- έναν παλμό στο $(-1, 1)$ με πλάτος 2
- έναν παλμό στο $(1, 2)$ με πλάτος 1
- μια συνάρτηση δέλτα στο $t_0 = 2$ με συντελεστή 2

Έχουμε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{46}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t+2)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-2}^{-1} 1e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-1}^{1} 2e^{-j2\pi ft}dt + \int_{1}^{2} 1e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-2)e^{-j2\pi ft}dt \tag{47}$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+2)e^{j4\pi f}dt + \int_{-2}^{-1} 1e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-1}^{1} 2e^{-j2\pi ft}dt + \int_{1}^{2} 1e^{-j2\pi ft}dt + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-2)e^{-j4\pi f}dt \tag{48}$$

$$= 2e^{j4\pi f}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+2)dt + \int_{-2}^{-1} 1e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-1}^{1} 2e^{-j2\pi ft}dt + \int_{1}^{2} 1e^{-j2\pi ft}dt + 2e^{-j4\pi f}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-2)dt \tag{49}$$

$$= 2e^{j4\pi f} + \int_{-2}^{-1} 1e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-1}^{1} 2e^{-j2\pi ft}dt + \int_{1}^{2} 1e^{-j2\pi ft}dt + 2e^{-j4\pi f} \tag{50}$$

$$= 4\cos(4\pi f) + \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{1}^{2} \tag{51}$$

$$= 4\cos(4\pi f) - \frac{1}{j2\pi f}(-e^{j2\pi f} - e^{j4\pi f} + e^{-j2\pi f} + e^{-j4\pi f}) \tag{52}$$

$$= 4\cos(4\pi f) + \frac{1}{\pi f}\sin(4\pi f) + \frac{1}{\pi f}\sin(2\pi f) \tag{53}$$

$$= 4\cos(4\pi f) + 4\mathrm{sinc}(4f) + 2\mathrm{sinc}(2f) \tag{54}$$

Άσκηση 6 - Βαθμός: 15

Η Διαμόρφωση Πλάτους (Amplitude Modulation - AM) ήταν ο κυρίαρχος τρόπος εκπομπής σήματος κατά τα πρώτα ογδόντα χρόνια του 20ού αιώνα και παραμένει σε ευρεία χρήση και κατά τον 21ο. Οι σταθμοί που εκπέμπουν στα AM παγκοσμίως αριθμούνται σε 16265. Η κύρια εφαρμογή της διαμόρφωσης AM είναι στη ραδιοφωνία ενώ με διαμόρφωση AM διαμορφώνεται και το σήμα εικόνας του αναλογικού τηλεοπτικού σήματος. Ένα AM-διαμορφωμένο σήμα γράφεται ως

$$x(t) = [1 + Am(t)]\cos(2\pi f_c t) \tag{55}$$

με $m(t)$ το σήμα πληροφορίας (π.χ. ραδιοφωνική εκπομπή) που θέλουμε να μεταδώσουμε. Ένα απλό AM-διαμορφωμένο σήμα είναι το

$$x(t) = [1 + \cos(2\pi 100t)]\cos(2\pi 1000t) \tag{56}$$

Αναπτύξτε σε εκθετική σειρά Fourier το παραπάνω σήμα (**10 μ.**) και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους (**2.5 μ.**) και το φάσμα φάσης της (**2.5 μ.**).

<u>Λύση:</u>

Είναι

$$x(t) = [1 + \cos(2\pi 100t)]\cos(2\pi 1000t) \tag{57}$$

$$= \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 1000t) \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{4}(e^{j2\pi 100t} + e^{-j2\pi 100t})(e^{j2\pi 1000t} + e^{-j2\pi 1000t}) \tag{59}$$

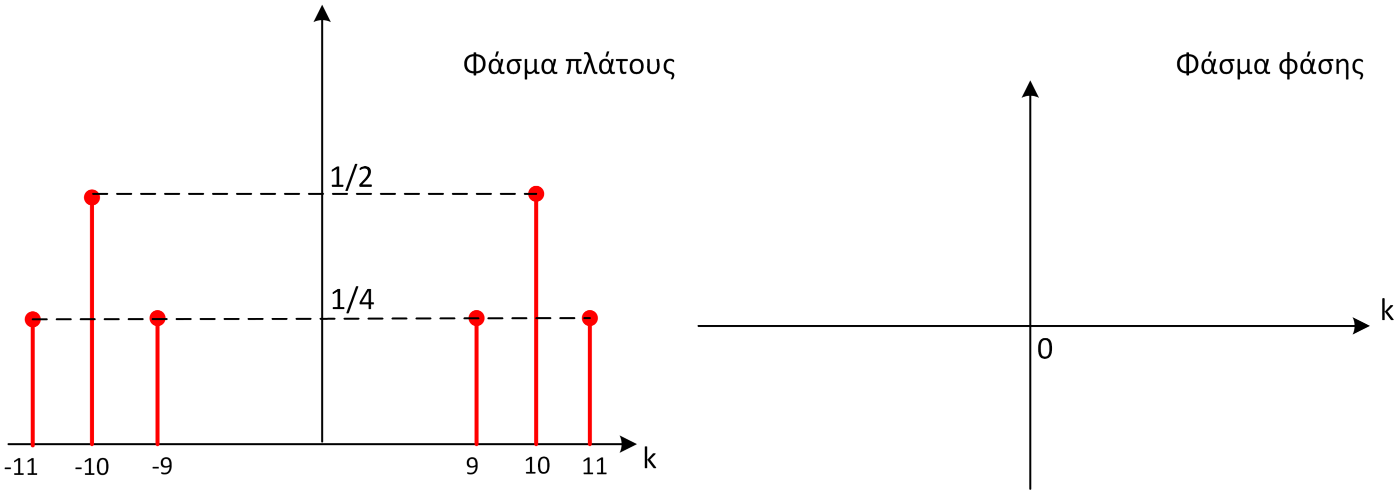
$$= \frac{1}{2}e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{4}(e^{j2\pi 1100t} + e^{-j2\pi 1100t} + e^{j2\pi 900t} + e^{-j2\pi 900t}) \tag{60}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j2\pi 1000t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1000t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi 1100t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 1100t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi 900t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 900t} \tag{61}$$

Η σειρά Fourier έχει θεμελιώδη συχνότητα

$$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{900, 1000, 1100\} = 100 \text{ Hz} \tag{62}$$

οπότε το φάσμα περιέχει την 9η, 10η, και 11η αρμονική.Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 2. Φάσματα με συχνότητες στον οριζόντιο άξονα θεωρούνται σωστά.



Σχήμα 2: *Φάσματα πλάτους και φάσης Άσκησης 6.*

.

Μονάδες: 130 - Άριστα: 100