

HY215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2020-21

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Εξέταση Προόδου

- **ΑΝΤΙΓΡΑΨΤΕ ΣΤΟ ΠΑΝΩ ΜΕΡΟΣ ΚΑΘΕ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ** τον παρακάτω πίνακα, βάζοντας τα 4 ψηφία του ΑΜ σας κάτω από τις σταθερές a, b, c, d :

a	b	c	d
-----	-----	-----	-----

- Αντικαταστήστε πριν οποιαδήποτε λύση σας τις σταθερές a, b, c, d όπου εμφανίζονται στα παρακάτω θέματα (μόνο με μικρά γράμματα) με τα αντίστοιχα ψηφία του ΑΜ σας.
- Λύσεις **ΧΩΡΙΣ** αντικατάσταση ή με **ΛΑΘΟΣ** αντικατάσταση ψηφίων **ΔΕΝ** είναι αποδεκτές και **ΜΗΔΕΝΙΖΟΝΤΑΙ**.
- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 1 ΩΡΑ και 45 ΛΕΠΤΑ**
- **ΠΡΟΘΕΣΜΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ : 16:15 ΑΥΣΤΗΡΑ** μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου στο

kafentz@csd.uoc.gr

- Απαγορεύεται η συνεργασία με οποιοδήποτε φυσικό πρόσωπο ή πρόσωπα και η μεταξύ σας ή με τρίτους αντιγραφή. Οι διδάσκοντες διατηρούν, μετά το πέρας της εξέτασης, το δικαίωμα (α) να μηδενίσουν κατ' ευθείαν γραπτό ή γραπτά με προφανείς ομοιότητες και (β) να καλέσουν σε προφορική εξέταση μέσω Zoom αν υπάρξουν όποιες υποψίες.
- Αιτιολογήστε **ΠΛΗΡΩΣ** όσα γράφετε.
- Δεν επιτρέπονται ερωτήσεις. Γράφετε **μόνοι/ες** σας με βάση όσα γνωρίζετε.

Θέμα 1ο - 30 μονάδες

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + (c + 3)\frac{d}{dt}y(t) + (c + 2)y(t) = x(t) \quad (1)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = a - 2$, $y'(0) = d + 1$.

(α) **[5 μ.]** Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.

(β) **[5 μ.]** Υπολογίστε την κρουστική απόκριση, $h(t)$.

(γ) **[15 μ.]** Υπολογίστε την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$, για είσοδο $x(t) = e^{-at}u(t)$.

(δ) **[5 μ.]** Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιολογήστε.

Λύση:

(α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + (c + 3)\lambda + (c + 2) \quad (2)$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι

$$\lambda_1, \lambda_2 \quad (3)$$

πάντα διαφορετικές μεταξύ τους. Έρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4)$$

με

$$y'_{zi}(t) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

Λύνοντας το σύστημα

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = a - 2 \quad (6)$$

$$y'_{zi}(0^-) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = d + 1 \quad (7)$$

βρίσκουμε τους συντελεστές c_1, c_2 , και τελικά θα είναι

$$y_{zi}(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})u(t) \quad (8)$$

(β) Ακριβώς όμοια με παραπάνω, με αρχικές συνθήκες τώρα

$$h(0^+) = 0, h'(0^+) = 1 \quad (9)$$

Έρα η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \quad (10)$$

με

$$h'(t) = \lambda_1 \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \mu_2 e^{\lambda_2 t} \quad (11)$$

Λύνοντας το σύστημα

$$h(0^+) = \mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (12)$$

$$h'(0^+) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 1 \quad (13)$$

βρίσκουμε τους συντελεστές μ_1, μ_2 , και τελικά θα είναι

$$h(t) = (\mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t})u(t) \quad (14)$$

(γ') Η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι η συνέλιξη μεταξύ των

$$h(t) = (\mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t})u(t) \quad (15)$$

και

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (16)$$

η οποία μπορεί να λυθεί αναλυτικά ή με χρήση πινάκων από τις σημειώσεις σας.

(δ') Το σύστημα είναι πάντα ευσταθές γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι πάντα αρνητικές (ανεξαρτήτως των ψηφίων του AM σας).

Θέμα 2ο - 30 μονάδες

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που σε μια περίοδο του γράφεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < \frac{2T_0}{3} \\ -(d+1), & \frac{2T_0}{3} < t < T_0 \end{cases} \quad (17)$$

Σχεδιάστε μια περίοδο του σήματος και βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Λύση:

Σχέδιο (5 μ.) και εύρεση

$$X_0 = \frac{2a}{3} - \frac{d+1}{3} \quad (5 \mu.) \quad (18)$$

Οι συντελεστές δίνονται ως

$$X_k = \frac{a+d+1}{j2\pi k} (1 - e^{-j4\pi k/3}) \quad (19)$$

και αντιστοιχούν σε **20 μ.**

Θέμα 3ο - 10 μονάδες

Οι συντελεστές Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι

$$X_k = \begin{cases} j, & k = 1, k = 2 \\ -j, & k = -1, k = -2 \\ \frac{1}{2j}, & k = a + 2 \\ -\frac{j}{2}, & k = -a - 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (20)$$

(α) [5 μ.] Σωστό ή λάθος; “ Το σήμα $x(t)$ που έχει αυτούς τους συντελεστές Fourier είναι πραγματικό, δηλ. $x(t) \in \mathbb{R}$.”
Αιτιολογήστε πλήρως.

(β) [5 μ.] Σωστό ή λάθος; “ Το φάσμα $X_{k-100} + X_{k+100}$ αντιστοιχεί σε καθαρά φανταστικό σήμα στο χρόνο, δηλ. $x(t) \in \mathbb{I}$.”
Αιτιολογήστε πλήρως.

Λύση:

(α) Για να είναι πραγματικό το σήμα πρέπει $X_k = X_{-k}^*$ ή αλλιώς

$$X_{-k} = X_k^* \quad (21)$$

Αυτό δεν ισχύει για $k_0 = \pm(a + 2)$, αφού $X_{k_0} = X_{-k_0}$ γιατί $1/2j = -j/2$. Ύρα το σήμα δεν είναι πραγματικό. Η πρόταση είναι **Λάθος: το σήμα ΔΕΝ είναι πραγματικό.**

(β) Το φάσμα με συντελεστές $Y_k = X_{k-100} + X_{k+100}$ αντιστοιχεί στο σήμα

$$y(t) = e^{j2\pi 100 f_0 t} x(t) + e^{-j2\pi 100 f_0 t} x(t) = 2 \cos(2\pi 100 f_0 t) x(t) \quad (22)$$

από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα. Ύρα η απάντηση εξαρτάται από το αν $x(t) \in \mathbb{I}$, καθώς το $y(t)$ είναι απλά ένα γινόμενο με ένα πραγματικό σήμα, $2 \cos(2\pi 100 f_0 t)$. Είναι

$$x(t) = j e^{j2\pi f_0 t} - j e^{-j2\pi f_0 t} + j e^{j2\pi 2 f_0 t} - j e^{-j2\pi 2 f_0 t} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi(a+2)f_0 t} + \frac{1}{2j} e^{-j2\pi(a+2)f_0 t} \quad (23)$$

$$= 2 \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) + 2 \cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/2) + \frac{1}{j} \cos(2\pi(a+2)f_0 t) \quad (24)$$

$$= 2 \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) + 2 \cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/2) - j \cos(2\pi(a+2)f_0 t) \quad (25)$$

$$= x_R(t) + j x_I(t) \quad (26)$$

με

$$x_R(t) = 2 \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) + 2 \cos(2\pi 2 f_0 t + \pi/2) \quad (27)$$

$$x_I(t) = -\cos(2\pi(a+2)f_0 t) \quad (28)$$

Ύρα το σήμα είναι μιγαδικό (έχει μη μηδενικά πραγματικά και φανταστικά μέρη), οπότε και ο πολλαπλασιασμός του με ένα πραγματικό σήμα μας δίνει μιγαδικό αποτέλεσμα. Έτσι, η πρόταση είναι **Λάθος: το σήμα δεν είναι καθαρά φανταστικό - είναι μιγαδικό.**

Θέμα 4ο - 30 μονάδες

(α) **[10 μ.]** Υπολογίστε το μετασχ. Fourier της απόκρισης μηδενικής κατάστασης του Θέματος 1.

(β) **[20 μ.]** Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος του Θέματος 2.

Λύση:

(α) Ο μετασχηματισμός δίνεται απευθείας από πίνακες, χωρίς καθόλου πράξεις, μέσω των ζευγών

$$e^{-at} u(t), a > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (29)$$

$$t e^{-at} u(t), a > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad (30)$$

του αποτελέσματος του Θέματος 1(γ), και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχ. Fourier.

(β) Έχουμε ήδη τους συντελεστές X_k από το Θέμα 2, οπότε δε χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτε εκ νέου. Ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος δίνεται ως

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0) \quad (31)$$

δηλ.

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a+d+1}{j2\pi k} (1 - e^{-j4\pi k/3}) \right] \delta(f - kf_0) \quad (32)$$

ή και πιο αναλυτικά

$$X(f) = \left[\frac{2a - (d+1)}{3} \right] \delta(f) + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \left[\frac{a+d+1}{j2\pi k} (1 - e^{-j4\pi k/3}) \right] \delta(f - kf_0) \quad (33)$$

ΣΧΟΛΙΑ :

- Είναι απίστευτο πόσοι/ες από σας ΔΕ ΔΙΑΒΑΣΑΝ ΚΑΘΟΛΟΥ τις οδηγίες στην πρώτη σελίδα! Υπερβολικά μεγάλος αριθμός από σας δεν αντικατέστησε τα ψηφία του ΑΜ του στις εκφωνήσεις των Θεμάτων.
- Θέμα 1(α): πολύ σοβαρό πρόβλημα σε λύση απλών συστημάτων 2x2! Είχατε υπολογιστές, είχατε διαδίκτυο, μπορούσατε τουλάχιστον να επιβεβαιώσετε τη λύση σας και να τη διορθώσετε, αν χρειαζόταν!
- Θέμα 1(β): σε πολλά γραπτά, απλά μεταφέρατε την απάντηση από το 1(α) στο 1(β) - για κάποιο ανεξήγητο λόγο. Επίσης για ανεξήγητους λόγους, ΠΑΡΑ ΠΟΛΛΟΙ/ΕΣ από σας, χρησιμοποίησατε τη σχέση

$$h(t) = h_o(t) \pm \frac{d}{dt} h_o(t)$$

προφανώς κοιτώντας κάποια λυμένη άσκηση αλλά χωρίς να γνωρίζετε τι κάνετε και αν χρειαζόταν κάτι τέτοιο.

- Θέμα 1(γ): πρόβλημα με πράξεις κι εδώ αλλά κάπως “δικαιολογημένο”, καθώς ήταν μια διπλή συνέλιξη. Μπορούσατε να συμβουλευτείτε έτοιμους πίνακες από τις σημειώσεις σας.
- Θέμα 1(δ): συνήθως σωστές απαντήσεις.
- Θέμα 2: Σε αρκετά γραπτά δεν υπήρξε σχεδίαση μιας περιόδου του σήματος, όπως ζητούνταν. Σε λιγότερα, η εύρεση του X_0 ήταν λάθος.
- Θέμα 3: συνήθως σωστές απαντήσεις για το (α), σχεδόν όλες λάθος για το (β).
- Θέμα 4(α): Κάποια γραπτά βρήκαν το μετασχ. Fourier της απόκρισης μηδενικής εισόδου και όχι μηδενικής κατάστασης, όπως ζητείται. Σε κάθε περίπτωση, η λύση δινόταν με απλή εφαρμογή των πινάκων μετασχ. Fourier πάνω στο αποτέλεσμα του Θέματος 1(γ), που ακόμα και λάθος να το είχατε βρει, παίρνατε κάποιες μονάδες από τη σωστή εφαρμογή των τύπων.
- Θέμα 4(β): ΠΑΡΑ ΠΟΛΛΑ γραπτά βρήκαν το μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του σήματος, δηλ. αυτής που δίνεται στο Θέμα 2, και όχι το μετασχ. Fourier όλου του περιοδικού σήματος - που αν έχετε βρει ένα, έστω λάθος, αποτέλεσμα στο Θέμα 2 για τους συντελεστές X_k , η σωστή εφαρμογή τους στον τύπο που φαίνεται στις λύσεις θα σας έδινε τις πλήρεις μονάδες!