ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Εξέταση Προόδου - Λύσεις

Θέμα 1 - Βαθμός: 15

Ενα *πραγματικό* περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$[\, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \,] = [\, 4e^{-j\pi/15}, \sqrt{2}e^{j\pi/2}, e^{j\pi/6}, \sqrt{3}e^{-j\pi/3}, e^{j\pi/9} \,] \tag{1}$$

(α΄) **(5 μ.)** Πόση είναι η ισχύς P_x του σήματος;

(β΄) **(10 μ.)** Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος οφείλεται αθροιστικά στους δυο πρώτους όρους της τριγωνομετρικής αναπαράστασής του σε Σειρά Fourier (δηλ. στο πρώτο και δεύτερο ημίτονο - $k = 1$ και $k = 2$);

Λύση:

(α΄) Η ισχύς του σήματος μπορεί να βρεθεί από το θεώρημα του Parseval ως

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \tag{2}$$

και αφού το σήμα είναι πραγματικό, έχουμε $X_{-k} = X_k^*$ και $|X_{-k}| = |X_k^*| = |X_k|$. Έτσι

$$P_x = 2 \times (4^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2) = 2 \times 23 = 46 \tag{3}$$

(β΄) Το πρώτο και το δεύτερο ημίτονο σχηματίζουν το πλάτος τους από τους όρους X_1, X_1^* και X_2, X_2^*, οπότε έχουμε

$$P_{1,2} = |X_1|^2 + |X_1^*|^2 + |X_2|^2 + |X_2^*|^2 = 32 + 4 = 36 \tag{4}$$

κι έτσι

$$p = \frac{P_{1,2}}{P_x} = \frac{36}{46} \approx 0.78 \Longrightarrow p = 78\% \tag{5}$$

Θέμα 2 - Βαθμός: 25

Ένα πολύ καλό και διάσημο ξενόγλωσσο σύγγραμμα επεξεργασίας σήματος αναφέρει ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 1 έχει τους πολύ περίπλοκους συντελεστές Fourier που αναγράφονται στη φωτοτυπία στο πλαίσιο.

Δείξτε ότι αν γνωρίζετε το Παράδειγμα 4.8 των σημειώσεών σας, δηλ. ότι το περιοδικό σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$y_{T_0}(t) = \frac{2A}{T_0}t, \;\; -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \tag{6}$$

έχει συντελεστές

$$Y_0 = 0, \quad Y_k = \frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{7}$$

τότε μπορείτε να εξάγετε την κομψότερη έκφραση των συντελεστών του σήματος του Σχήματος 1 ως

$$X_0 = \frac{1}{4}, \quad X_k = \frac{3}{4}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{3}\right)} \tag{8}$$

Λύση:

Μπορούμε να μετατρέψουμε το δοθέν σήμα στο ζητούμενο ως

$$x(t) = \frac{1}{4} + y\Big(t - \frac{1}{4}\Big) \tag{9}$$

δηλ. κάνοντας τα εξής:

- Αρχικά, θέτοντας $A = \frac{3}{4}$ και $T_0 = \frac{3}{2}$, δηλ.

$$y_{T_0}(t) = t, \;\; -\frac{3}{4} < t < \frac{3}{4} \tag{10}$$

  οπότε

$$Y_k = 0, \;\; Y_k = \frac{3}{4}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{11}$$

▶ **Problem 3.10** Find the FS representation of the sawtooth wave depicted in Fig. 3.24.

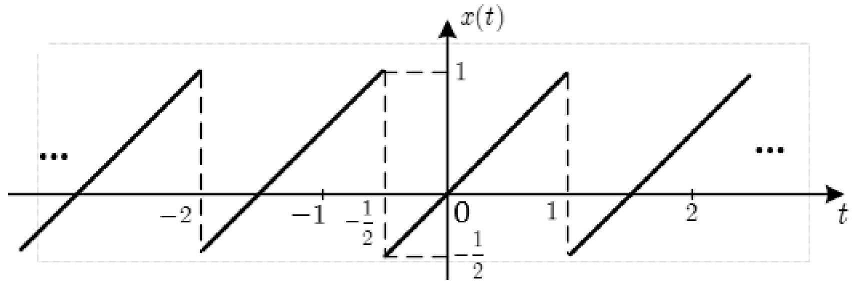


Figure 3.24 Periodic signal for Problem 3.10.

Answer: Integrate t from $-\frac{1}{2}$ to 1 in Eq. (3.20) to obtain

$$x(t) \xleftrightarrow{FS;\frac{4\pi}{3}} X[k] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k=0 \\ \frac{-2}{3jk\omega_o}\left(e^{-jk\omega_o} + \frac{1}{2}e^{jk\omega_o/2}\right) + \frac{2}{3k^2\omega_o^2}\left(e^{-jk\omega_o} - e^{jk\omega_o/2}\right), & \text{otherwise} \end{cases}$$

Σχήμα 1: *Περιοδικό Σήμα Θέματος 2.*

- Μετατοπίζοντας προς τα δεξιά το παραπάνω σήμα $y_{T_0}(t)$ κατά $t_0 = \frac{1}{4}$, οπότε οι συντελεστές γίνονται

$$Y_k e^{-j2\pi k/T_0 \frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} e^{-j2\pi k/T_0 \frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} e^{-j4\pi k/3 \frac{1}{4}} \tag{12}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} e^{-j\pi k/3} = \frac{3}{4}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j(\pi/2 - \pi k/3)} \tag{13}$$

$$= X_k \tag{14}$$

- Προσθέτουμε τη σταθερά $1/4$, δηλ. $Y_0 \leftarrow \frac{1}{4} = X_0$.

Η ακολουθία μετατροπής φαίνεται στο Σχήμα 2.

Θέμα 3 - Βαθμός: 30

(α΄) **(10 μ.)** Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t),\ \ a > 0$ είναι

$$X(f) = -j\frac{4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{15}$$

(β΄) **(5 μ.)** Δείξτε ότι

$$\lim_{a\to 0} X(f) = F\{\mathrm{sgn}(t)\} \tag{16}$$

με $F\{\mathrm{sgn}(t)\}$ το μετασχ. Fourier της συνάρτησης προσήμου $\mathrm{sgn}(t)$.

(γ΄) **(15 μ.)** Γνωρίζετε ότι

$$y(t) = e^{-at}u(t),\ \ a > 0 \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \tag{17}$$

Δείξτε ότι

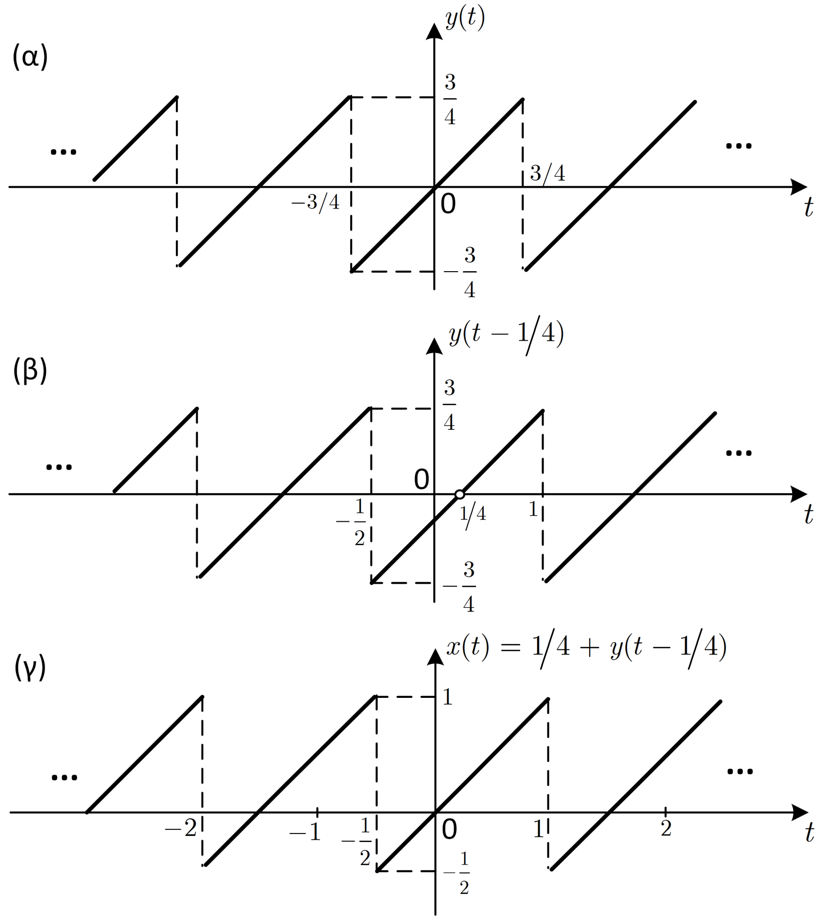
$$\lim_{a\to 0} Y(f) = F\{u(t)\} \tag{18}$$

με $F\{u(t)\}$ το μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Ξέρουμε ότι

$$e^{-at}u(t),\ \ a > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \tag{19}$$



Σχήμα 2: *Λύση Θέματος 2.*

και

$$-e^{at}u(-t),\ \ a>0 \longleftrightarrow -\frac{1}{a-j2\pi f} \tag{20}$$

οπότε

$$x(t)=e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t) \longleftrightarrow X(f)=\frac{1}{a+j2\pi f}-\frac{1}{a-j2\pi f}=-j\frac{4\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2} \tag{21}$$

(β΄) Είναι

$$\lim_{a\to 0} X(f)=\lim_{a\to 0}\Big(-j\frac{4\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}\Big)=-j\frac{4\pi f}{4\pi^2 f^2}=\frac{1}{j\pi f}=F\{\mathrm{sgn}(t)\} \tag{22}$$

(γ΄) Είναι

$$\lim_{a\to 0} Y(f)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a+j2\pi f}=\lim_{a\to 0}\frac{a-j2\pi f}{|a+j2\pi f|^2} \tag{23}$$

$$=\lim_{a\to 0}\Big(\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}+j\frac{-2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}\Big)=\lim_{a\to 0}\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}+j\lim_{a\to 0}\frac{-2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2} \tag{24}$$

Έδώ

$$\lim_{a\to 0}\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}=0,\ \ f\neq 0 \tag{25}$$

ενώ για $f=0$, το όριο αυτό απειρίζεται. Επιπλέον, έστω

$$Z(f)=\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2} \tag{26}$$

και $z(t)$ το σήμα που αντιστοιχεί ο παραπάνω μετασχηματισμός. Από πίνακες ζευγών ξέρουμε ότι

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \tag{27}$$

οπότε

$$z(t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|} \longleftrightarrow Z(f) = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{28}$$

Έτσι,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f) e^{j2\pi f t} df \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} z(0) \tag{29}$$

Προφανώς

$$\frac{1}{2} z(0) = \frac{1}{2} \tag{30}$$

Αυτό σημαίνει ότι το εμβαδό κάτω από τη γραφική παράσταση $\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}$ είναι $\frac{1}{2}$. Τα παραπάνω δυο στοιχεία, δηλ.

$$\lim_{a\to 0} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = 0, \;\; f \neq 0 \tag{31}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{1}{2} \tag{32}$$

συνιστούν ότι η συνάρτηση αυτή, όταν $a \to 0$, συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση Δέλτα με επιφάνεια $1/2$, κι έτσι

$$\lim_{a\to 0} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{2}\delta(f) \tag{33}$$

Όσο για το δεύτερο όριο, απλά

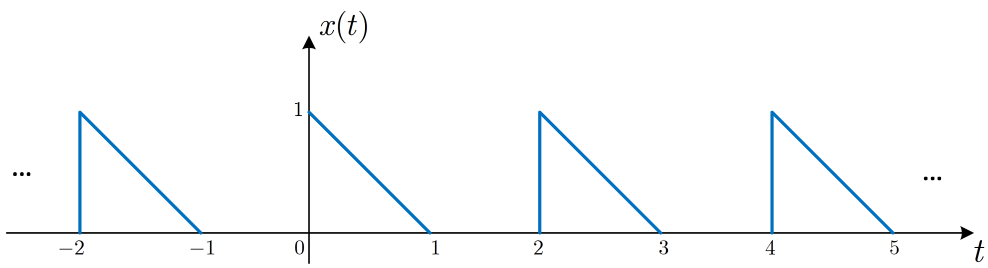
$$\lim_{a\to 0} \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{j2\pi f} \tag{34}$$

οπότε

$$\lim_{a\to 0} Y(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} = F\{u(t)\} \tag{35}$$

Θέμα 4 - Βαθμός: 30

Έστω το περιοδικό σήμα[1] που φαίνεται στο Σχήμα 3. Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος δίνεται ως



Σχήμα 3: *Περιοδικό Σήμα Θέματος 4.*

$$X(f) = \frac{1}{4} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j2\pi k}\Big(1 - \mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{2}\Big) e^{-j\frac{\pi k}{2}}\Big)\delta\Big(f - \frac{k}{2}\Big) \tag{36}$$

Λύση:

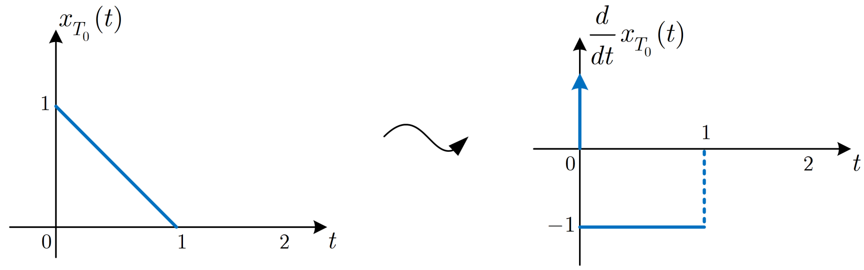
Θα υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ μέσω του μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος, $x_{T_0}(t)$. Η περίοδος είναι $T_0 = 2$, και επιλέγουμε ως μια περίοδο $x_{T_0}(t)$ το τμήμα από 0 ως 2 δευτερόλεπτα, το οποίο και είναι σήμα ενέργειας πλέον, οπότε έχει μετασχ. Fourier. Παραγωγίζοντάς το, παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} x_{T_0}(t) = \delta(t) - \mathrm{rect}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) \tag{37}$$

όπως στο Σχήμα 4 το οποίο έχει μετασχ. Fourier

$$j2\pi f X_{T_0}(f) = 1 - \mathrm{sinc}(f) e^{-j2\pi f \frac{1}{2}} \tag{38}$$

[1] Γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία και ως *πτερύγιο σμήνους μικρών καρχαριών που κολυμπούν προς τα δεξιά...*



Σχήμα 4: *Σήμα ενέργειας και παράγωγός του.*

από την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο. Οπότε

$$X_{T_0}(f) = \frac{1}{j2\pi f}(1 - \mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f}) \tag{39}$$

Σύμφωνα με τη σχέση μετασχηματισμού και σειράς Fourier, μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές X_k ως

$$X_k = \frac{1}{T_0}X_{T_0}(f)\Big|_{f=k/T_0} = \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi\frac{k}{2}}\left(1 - \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)e^{-j\pi\frac{k}{2}}\right) = \frac{1}{j2\pi k}\left(1 - \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)e^{-j\pi\frac{k}{2}}\right) \tag{40}$$

Ο συντελεστής X_0 πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά και εύκολα δίνεται ότι ισούται με $1/4$. Οπότε ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος δίνεται ως

$$X(f) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{4} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{j2\pi k}\left(1 - \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)e^{-j\pi\frac{k}{2}}\right)\delta\left(f - \frac{k}{2}\right) \tag{41}$$

Θέμα 5 - Βαθμός: 20

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) \tag{42}$$

Υπολογίστε

(α') **(5 μ.)** την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος, $H(f)$

(β') **(15 μ.)** την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$

Λύση:

(α') Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) \longleftrightarrow (j2\pi f)^2Y(f) + 4(j2\pi f)Y(f) + 3Y(f) = j2\pi fX(f) + 2X(f) \tag{43}$$

$$((j2\pi f)^2 + 4(j2\pi f) + 3)Y(f) = (j2\pi f + 2)X(f) \tag{44}$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{(j2\pi f + 2)}{(j2\pi f)^2 + 4(j2\pi f) + 3} \tag{45}$$

Οπότε η απόκριση σε συχνότητα είναι

$$H(f) = \frac{(j2\pi f + 2)}{(j2\pi f)^2 + 4(j2\pi f) + 3} \tag{46}$$

(β') Θέτουμε $u = j2\pi f$ και εφαρμόζουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, οπότε

$$\frac{(u+2)}{u^2 + 4u + 3} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+3} \tag{47}$$

με

$$A = \frac{u+2}{u+3}\Big|_{u=-1} = \frac{1}{2} \tag{48}$$

$$B = \frac{u+2}{u+1}\Big|_{u=-3} = \frac{1}{2} \tag{49}$$

οπότε

$$H(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2}\frac{1}{3+j2\pi f} \tag{50}$$

Από γνωστά ζεύγη μετασχηματισμού Fourier έχουμε

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \tag{51}$$

Θέμα 6 - Βαθμός: 10

Υπολογίστε τα παρακάτω

(α΄) (**2.5 μ.**) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)\delta(t-\pi)dt$

(β΄) (**2.5 μ.**) $\int_{-\infty}^{t} \sin(\tau)u(\tau)d\tau$

(γ΄) (**2.5 μ.**) $\int_{-\infty}^{t} \sin(\tau)\delta(\tau)d\tau$

(δ΄) (**2.5 μ.**) $\int_{-3}^{3} \cos(2\pi t)\delta(t-4)dt$

Λύση:

(α΄) Είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)\delta(t-\pi)dt = \cos(t)\Big|_{t=\pi} = \cos(\pi) = -1 \tag{52}$$

(β΄) Αφού

$$u(\tau) = 1, \forall \tau > 0 \tag{53}$$

είναι

$$\int_{-\infty}^{t} \sin(\tau)u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \sin(\tau)d\tau = -\cos(\tau)\Big|_{0}^{t} = -(\cos(t)-1) = 1-\cos(t) \tag{54}$$

για $t > 0$, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{t} \sin(\tau)u(\tau)d\tau = (1-\cos(t))u(t) \tag{55}$$

(γ΄) Αφού

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{56}$$

τότε

$$\int_{-\infty}^{t} \sin(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \sin(0)\delta(\tau)d\tau = 0 \tag{57}$$

γιατί $\sin(0) = 0$.

(δ΄) Είναι

$$\int_{-3}^{3} \cos(2\pi t)\delta(t-4)dt = 0 \tag{58}$$

αφού ολοκληρώνουμε σε διάστημα που δεν περιέχει τη συνάρτηση Δέλτα (η οποία βρίσκεται στο $t = 4$).

Μονάδες: 130
Άριστα: 110