

**HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**  
**Εαρινό Εξάμηνο 2017-18**

**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

**Εξέταση Προόδου και Λύσεις - Διάρκεια: 2 ώρες**

**Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή.**

**Άσκηση 1 - Βαθμός: 10**

Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5] = [2e^{-j\pi/5}, \sqrt{3}e^{j\pi/4}, 2e^{j\pi/12}, \sqrt{3}e^{-j\pi/5}, e^{j\pi/3}] \quad (1)$$

Πόση είναι η ισχύς  $P_x$  του σήματος; Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος οφείλεται στον πρώτο όρο της τριγωνομετρικής (ή μονόπλευρης) αναπαράστασής του σε Σειρά Fourier (δηλ. στο πρώτο ημίτονο -  $k = 1$ );

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η ισχύς δίνεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (2)$$

Μας δίνονται μόνο οι συντελεστές για  $k > 0$  αλλά εφόσον το σήμα είναι πραγματικό, για  $k < 0$  θα είναι οι συζυγείς τους, και μάλιστα  $|X_k| = |X_{-k}^*|$ . Από τη δεύτερη σχέση έχουμε

$$P_x = 2 \left[ |2e^{-j\pi/5}|^2 + |\sqrt{3}e^{j\pi/4}|^2 + |2e^{j\pi/12}|^2 + |\sqrt{3}e^{-j\pi/5}|^2 + |e^{j\pi/3}|^2 \right] = 2(4 + 3 + 4 + 3 + 1) = 2 \times 15 = 30 \quad (3)$$

Στο πρώτο ημίτονο αντιστοιχούν οι συντελεστές  $X_1, X_{-1} = X_1^*$ , οπότε για αυτά η ισχύς τους είναι  $4 + 4 = 8$ , άρα το ποσοστό είναι  $8/30 \approx 26\%$ .

**Άσκηση 2 - Βαθμός: 15**

Λύστε την εξίσωση

$$2 \cos(2\pi 100t - \pi/3) + \cos(2\pi 100t + \pi/4) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) - 3 \cos(2\pi 100t - \pi/4) \quad (4)$$

ως προς το άγνωστο ημίτονο.

Λύση:

Έχουμε διαδοχικά

$$2 \cos(2\pi 100t - \pi/3) + \cos(2\pi 100t + \pi/4) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) - 3 \cos(2\pi 100t - \pi/4) \quad (5)$$

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = 2 \cos(2\pi 100t - \pi/3) + \cos(2\pi 100t + \pi/4) + 3 \cos(2\pi 100t - \pi/4) \quad (6)$$

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{2e^{j\pi/3} e^{j2\pi 100t} + e^{j\pi/4} e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j\pi/4} e^{j2\pi 100t}\} \quad (7)$$

$$= \Re\{(2e^{j\pi/3} + e^{j\pi/4} + 3e^{-j\pi/4})e^{j2\pi 100t}\} \quad (8)$$

$$= \Re\{(a + jb)e^{j2\pi 100t}\} \quad (9)$$

με

$$a = 2 \cos(\pi/3) + \cos(\pi/4) + 3 \cos(-\pi/4) = 2 \cos(\pi/3) + 4 \cos(\pi/4) = 1 + 2\sqrt{2} \quad (10)$$

$$b = 2 \sin(\pi/3) + \sin(\pi/4) + 3 \sin(-\pi/4) = 2 \sin(\pi/3) - 2 \sin(\pi/4) = \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad (11)$$

Οπότε

$$a + jb = (1 + 2\sqrt{2}) + j(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3.8284 + j0.3178 = 3.8416e^{j0.0263\pi} \quad (12)$$

Οπότε

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \Re\{3.8416e^{j0.0263\pi} e^{j2\pi 100t}\} \quad (13)$$

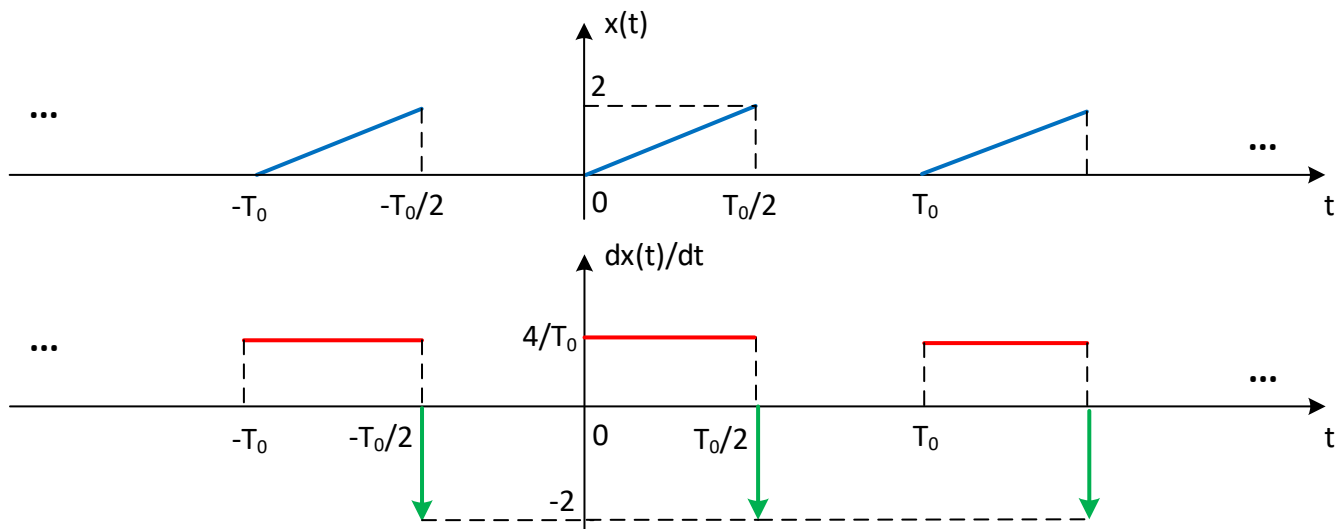
$$= 3.8416 \cos(2\pi 100t + 0.0263\pi) \quad (14)$$

### Άσκηση 3 - Βαθμός: 40

Για το περιοδικό σήμα  $x(t)$  το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 1, δείξτε ότι οι συντελεστές της εκθετικής Σειράς Fourier του δίνονται ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (15)$$

Συνίσταται να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες.



Σχήμα 1: Σήμα  $x(t)$  Άσκησης 3.

Λύση:

Παραγωγίζοντας το σήμα στο χρόνο θα έχουμε το περιοδικό σήμα του Σχήματος 1. Αυτό μπορούμε εύκολα να το διασπάσουμε σε δυο υποσήματα,  $dx_1(t)/dt$  και  $dx_2(t)/dt$ . Το πρώτο είναι μια σειρά παλμών με πλάτος  $4/T_0$  και το δεύτερο μια σειρά συναρτήσεων Δέλτα με τιμή  $-2$ . Έχουμε

$$X_{k1} = \frac{4}{T_0} \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, \quad k \text{ περιττό} = \frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\pi/2}, \quad k \text{ περιττό} \quad (16)$$

από το τυπολόγιο. Το δεύτερο σήμα έχει συντελεστές

$$X_{k_2} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (-2\delta(t - T_0/2)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = -\frac{2}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = -\frac{2}{T_0} e^{-j\pi k} = -\frac{2}{T_0} (-1)^k \quad \forall k \quad (17)$$

από το τυπολόγιο και τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Συνολικά

$$X_d = X_{k_1} + X_{k_2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\pi/2} + \frac{2}{T_0}, & k \text{ περιττά} \\ -\frac{2}{T_0}, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (18)$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές του αρχικού σήματος, ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi k f_0} \left( \frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\pi/2} + \frac{2}{T_0} \right), & k \text{ περιττά} \\ -\frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{2}{T_0}, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{j\pi^2 k^2} e^{-j\pi/2} + \frac{1}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ -\frac{1}{j\pi k}, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (19)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\pi} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (20)$$

Λύσεις με τον ορισμό ή με άλλη διάσπαση είναι αποδεκτές αλλά η παραπάνω λύση είναι η ευκολότερη.

#### Άσκηση 4 - Βαθμός: 15

Αναπτύξτε σε εκθετική Σειρά Fourier το σήμα :

$$x(t) = [6 + 2 \cos(2\pi 5t)] \cos(2\pi 100t)$$

και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Είναι

$$x(t) = [6 + 2 \cos(2\pi 5t)] \cos(2\pi 100t) = 6 \cos(2\pi 100t) + 2 \cos(2\pi 5t) \cos(2\pi 100t) \quad (21)$$

$$= 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + (e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t}) \left( \frac{1}{2} e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 100t} \right) \quad (22)$$

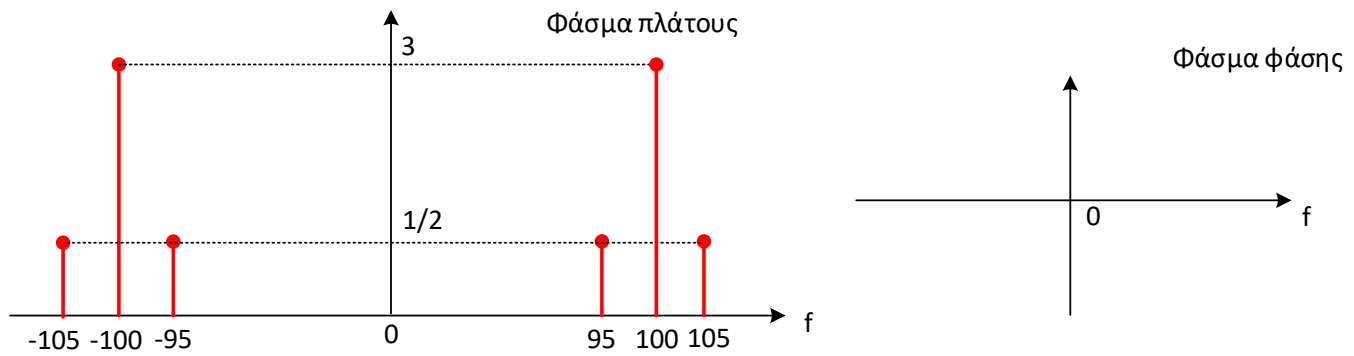
$$= 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 5t} e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 5t} e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 5t} e^{j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 5t} e^{-j2\pi 100t} \quad (23)$$

$$= 3e^{j2\pi 100t} + 3e^{-j2\pi 100t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 105t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 95t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 95t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 105t} \quad (24)$$

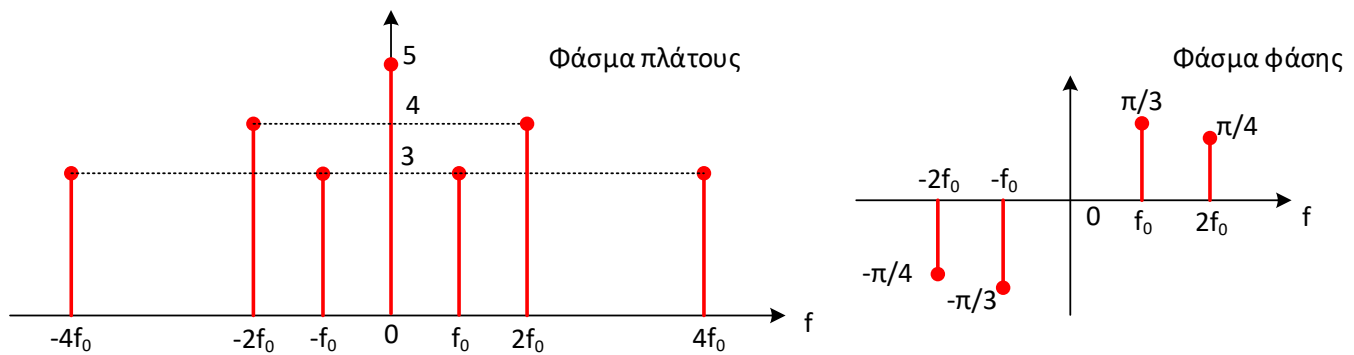
Τα φάσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.

#### Άσκηση 5 - Βαθμός: 15

Αναπτύξτε σε τριγωνομετρική (ή μονόπλευρη) Σειρά Fourier το σήμα του οποίου το φάσμα πλάτους και φάσης της εκθετικής Σειράς Fourier φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 3.



Σχήμα 2: Φάσματα Άσκησης 4.



Σχήμα 3: Φάσματα άσκησης 5.

Λύση:

Έχουμε

$$x(t) = 5 + 3e^{j\pi/3}e^{j2\pi f_0 t} + 4e^{j\pi/4}e^{j2\pi 2f_0 t} + 3e^{j2\pi 4f_0 t} + 3e^{-j\pi/3}e^{-j2\pi f_0 t} + 4e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 2f_0 t} + 3e^{-j2\pi 4f_0 t} \quad (25)$$

$$= 5 + 6 \cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + 8 \cos(2\pi 2f_0 t + \pi/4) + 6 \cos(2\pi 4f_0 t) \quad (26)$$

η οποία αποτελεί και τη ζητούμενη τριγωνομετρική Σειρά Fourier.

**Άσκηση 6 - Βαθμός: 20**

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$1. \int_{-\infty}^t \cos(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$2. \int_{-\infty}^t \cos(\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)u(t-1)\delta(t)dt$$

$$4. \int_0^{2\pi} t \sin(t/2)\delta(\pi-t)dt$$

Λύση:

1. Αφού  $u(t) = 1, t > 0$ , έχουμε

$$\int_{-\infty}^t \cos(\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t \cos(\tau) \cdot 1 d\tau = \sin(t) \quad (27)$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^t \cos(\tau)u(\tau)d\tau = \begin{cases} \sin(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (28)$$

2. Αφού  $\cos(t)\delta(t) = \cos(0)\delta(t)$ , έχουμε

$$\int_{-\infty}^t \cos(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t \cos(0)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t) \quad (29)$$

3. Αφού  $u(t-1) = 1, t > 1$ , έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)u(t-1)\delta(t)dt = \int_1^{+\infty} \cos(t)\delta(t)dt = \int_1^{+\infty} \cos(0)\delta(t)dt = \int_1^{+\infty} \delta(t)dt = 0 \quad (30)$$

αφού η συνάρτηση Δέλτα εντός του ολοκληρώματος “ζει” στο  $t = 0$ , που είναι εκτός διαστήματος ολοκλήρωσης.  
Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)u(t-1)\delta(t)dt = 0 \quad \forall t \quad (31)$$

4. Είναι

$$\int_0^{2\pi} t \sin(t/2)\delta(\pi-t)dt = \int_0^{2\pi} \pi \sin(\pi/2)\delta(\pi-t)dt = \int_0^{2\pi} \pi \cdot 1 \cdot \delta(\pi-t)dt = \pi \int_0^{2\pi} \delta(\pi-t)dt = \pi \quad (32)$$

αφού η συνάρτηση Δέλτα βρίσκεται στη θέση  $t = \pi$ .

Μονάδες: 115

Άριστα: 100