ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τελική Εξέταση - Σχόλια και Λύσεις

Προφανώς δεν μπορούν να υπάρξουν αναλυτικές λύσεις καθώς ο/η καθένας/καθεμιά σας είχε γραπτό θεμάτων που διέφερε με των υπολοίπων είτε στην αρίθμηση των θεμάτων είτε στα δεδομένα τους - είναι ένας τρόπος διασφάλισης της αδιαβλητότητας της εξέτασης: διαφορετικά θέματα για σχεδόν όλους/ες, στην ίδια όμως φιλοσοφία για να μην υπάρξουν αδικίες.

Σε αυτό το κείμενο θα συζητήσουμε για τις λύσεις και τη φιλοσοφία των θεμάτων χωρίς να προχωρήσουμε σε ακριβείς λύσεις (πλην μερικών θεμάτων).

Η αρίθμηση των θεμάτων είναι τυχαία.

Θέμα 1 - Μετασχηματισμός Fourier
Θέμα της μορφής: Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \alpha\delta(t) + \beta\delta(t - t_1) + \gamma\delta(t - t_2) + \epsilon\delta(t + t_3) \tag{1}$$

Προσθέστε ένα σήμα $y(t)$ ώστε το άθροισμα να έχει μετασχ. Fourier μια πραγματική συνάρτηση του f για κάθε $f \in \mathbb{R}$, και το άθροισμα να περιέχει τουλάχιστον τους όρους του $x(t)$ που προκύπτουν από την αντικατάσταση των $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, t_1, t_2, t_3$.

<u>Λύση:</u>
Ανεξαρτήτως των τιμών των σταθερών $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, t_1, t_2, t_3$ ο μετασχ. Fourier είναι μιγαδικός, και είναι

$$X(f) = \alpha + \beta e^{-j2\pi f t_1} + \gamma e^{-j2\pi f t_2} + \epsilon e^{j2\pi f t_3} \tag{2}$$

Για να είναι πραγματικό το άθροισμά του με ένα σήμα $y(t)$ πρέπει το $y(t)$ να είναι τέτοιο ώστε να υλοποιεί τις σχέσεις του Euler και να δίνει ημιτονοειδή αθροίσματα. Άρα

$$Y(f) = \beta e^{j2\pi f t_1} + \gamma e^{j2\pi f t_2} + \epsilon e^{-j2\pi f t_3} \tag{3}$$

κι έτσι

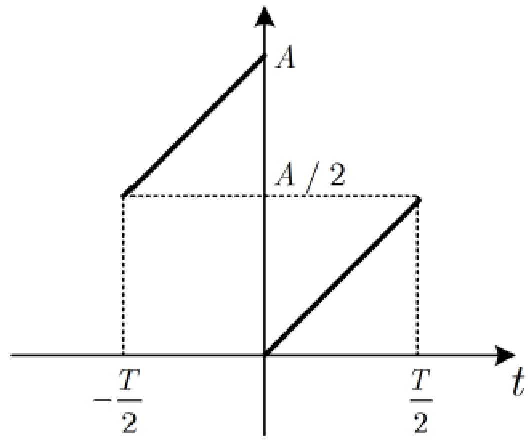
$$\begin{aligned} X(f) + Y(f) &= \alpha + \beta e^{-j2\pi f t_1} + \gamma e^{-j2\pi f t_2} + \epsilon e^{j2\pi f t_3} + \beta e^{j2\pi f t_1} + \gamma e^{j2\pi f t_2} + \epsilon e^{-j2\pi f t_3} && (4)\\ &= \alpha + 2\beta\cos(2\pi t_1 f) + 2\gamma\cos(2\pi t_2 f) + 2\epsilon\cos(2\pi t_3 f) && (5)\end{aligned}$$

που είναι πραγματική συνάρτηση του f. Οπότε

$$y(t) = \beta\delta(t + t_1) + \gamma\delta(t + t_2) + \epsilon\delta(t - t_3) \tag{6}$$

Λύσεις όπως $Y(f) = X^*(f)$ ή αν προσθέσετε και κάποια σταθερά ζ μαζί με την α στην επιλογή του $Y(f)$, θεωρούνται σωστές.

Θέμα 2 - Συντελεστές Fourier
Θέμα της μορφής: Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier $X_k,\ k \neq 0$ για το περιοδικό σήμα του οποίου μια περίοδος φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Συντελεστές Fourier του σήματος.*

Λύση:
Είτε αυτό το σχήμα είχατε είτε κάποια καθυστέρηση-προήγησή του κατά $T/2$ ή χρονική αναστροφή του, η προσέγγιση είναι η ίδια. Έχουμε ένα σήμα που αποτελείται από πλάγια τμήματα, οπότε η απευθείας εύρεση των X_k με τον ορισμό will take forever. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες. Η καλύτερη λύση είναι να βρούμε τους συντελεστές μέσω του μετασχ. Fourier της μιας περιόδου που βλέπουμε στο σχήμα. Με άλλα λόγια

$$X_k = \frac{1}{T}X(f)\Big|_{f=k/T} \tag{7}$$

Όμως και ο μετασχ. Fourier περιλαμβάνει ολοκλήρωση κατά παράγοντες, οπότε για να γλιτώσουμε χρόνο θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης

$$x'(t) \longleftrightarrow j2\pi f X(f) = F\{x'(t)\} \Longrightarrow X(f) = \frac{1}{j2\pi f}F\{x'(t)\} \tag{8}$$

Παραγωγίζοντας το σήμα έχουμε

$$x'(t) = \frac{A}{2}\delta(t+T/2) + \frac{A}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{t+T/4}{T/2}\Big) - A\delta(t) + \frac{A}{T}\mathrm{rect}\Big(\frac{t-T/4}{T/2}\Big) - \frac{A}{2}\delta(t-T/2) \tag{9}$$

με μετασχ. Fourier

$$F\{x'(t)\} = \frac{A}{2}e^{j2\pi fT/2} - \frac{A}{2}e^{-j2\pi fT/2} + \frac{A}{T}\frac{T}{2}\mathrm{sinc}(fT/2)e^{j2\pi fT/4} - A + \frac{A}{T}\frac{T}{2}\mathrm{sinc}(fT/2)e^{-j2\pi fT/4} \tag{10}$$

δηλ.

$$F\{x'(t)\} = jA\sin(\pi fT) - A + \frac{A}{2}\mathrm{sinc}(fT/2)2\cos(\pi fT/2) \tag{11}$$

$$= jA\sin(\pi fT) - A + A\mathrm{sinc}(fT/2)\cos(\pi fT/2) \tag{12}$$

Όμως το παραπάνω ισούται με

$$jA\sin(\pi fT) - A + A\mathrm{sinc}(fT/2)\cos(\pi fT/2) = j2\pi f X(f) \tag{13}$$

οπότε

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f}(jA\sin(\pi fT) - A + A\mathrm{sinc}(fT/2)\cos(\pi fT/2)) \tag{14}$$

Δειγματοληπτώντας ανά k/T και πολλ/ζοντας με $1/T$, έχουμε

$$X_k = \frac{1}{T}\frac{1}{j2\pi\frac{k}{T}}\left(jA\sin\left(\pi\frac{k}{T}T\right) - A + A\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{T}\frac{T}{2}\right)\cos\left(\pi\frac{k}{T}\frac{T}{2}\right)\right) \tag{15}$$

$$= \frac{1}{j2\pi k}\left(jA\sin\left(\pi k\right) - A + A\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\cos\left(\pi\frac{k}{2}\right)\right) \tag{16}$$

Ο όρος $\sin(\pi k) = 0$ και ο όρος $\mathrm{sinc}(k/2)\cos(\pi k/2) = 0$, για κάθε $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, αφού

$$\mathrm{sinc}(k/2) = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k/2} = 0, \quad k \text{ άρτιος} \tag{17}$$

$$\cos(\pi k/2) = 0, \quad k \text{ περιττός} \tag{18}$$

Άρα τελικά

$$X_k = -\frac{A}{j2\pi k} = \frac{jA}{2\pi k}, \;\; k \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{19}$$

Οποιοσδήποτε άλλος τρόπος καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα θεωρείται σωστός. Οι παραλλαγές του θέματος αυτού είχαν να κάνουν με ολίσθηση (οπότε θα πολλαπλασιάζατε το παραπάνω με $e^{\pm j2\pi k/Tt_0}$) ή με χρονική αντιστροφή (οπότε θα θέτατε όπου k το $-k$). Όμως δεν είναι απαραίτητο να θεωρήσετε ως "βάση" των αποτελεσμάτων σας το παραπάνω σχήμα. Έτσι, οποιαδήποτε σωστή λύση όμως είναι έγκυρη, ανεξαρτήτως αν συμφωνεί με την παραπάνω διαδικασία, τα όσα αναφέρθηκαν στη μικρή αυτή παράγραφο, ή αν χρησιμοποιεί εξάρχής τον ορισμό. Επίσης, αν σχεδιάσετε πλήρως το περιοδικό σήμα, μπορείτε να βρείτε βολικότερες περιόδους στις οποίες μπορείτε να δουλέψετε (π.χ. $x(t) = \frac{A}{T}t, \; 0 < t < T$, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, απ' όπου προκύπτει μόνο μια κατά παράγοντες ολοκλήρωση ή μια μόνο συνάρτηση Δέλτα στην παραγώγιση).

Θέμα 3 - Συσχετίσεις και Πυκνότητες

Θέμα της μορφής: η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_x(\tau)$ ενός σήματος περιγράφεται από τη σχέση

$$\phi_x(\tau) = \alpha \mathrm{g}\left(\frac{\beta\tau}{\gamma}\right) + \zeta \mathrm{s}\left(\frac{\eta\tau}{\mu}\right) \tag{20}$$

με $\mathrm{g}(), \mathrm{s}()$ γνωστές συναρτήσεις (παλμοί ή συναρτήσεις $\mathrm{sinc}()$) κι $\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta, \mu$ σταθερές που προκύπτουν απ'το ΑΜ σας. Ζητείται η τιμή της φασματικής πυκνότητας ενέργειας για $f = 0$.

<u>Λύση</u>:

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_x(f)$ είναι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης, οπότε μπορούσατε εύκολα να βρείτε το $\Phi_x(f)$ με χρήση των

$$\alpha \mathrm{tri}(\beta\tau/\gamma) \longleftrightarrow \alpha\frac{\gamma}{\beta}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\gamma}{\beta}f\right) \tag{21}$$

$$\alpha \mathrm{rect}(\beta\tau/\gamma) \longleftrightarrow \alpha\frac{\gamma}{\beta}\mathrm{sinc}\left(\frac{\gamma}{\beta}f\right) \tag{22}$$

και των δυικών τους. Η τιμή της για $f = 0$ δίνεται εύκολα, αφού η φασματική πυκνότητα ενέργειας για αυτήν την τιμή θα αποτελείται εν τέλει από τιμές της μορφής

$$A\mathrm{tri}(0) = A \;\; , \;\; A\mathrm{rect}(0) = A \;\; , \;\; A\mathrm{sinc}^2(0) = A \tag{23}$$

Οπότε αρκούσε να προσθέσετε κάποιες σταθερές. Ήταν κοντά σε φιλοσοφία με την Άσκηση 1 της 6ης Σειράς Ασκήσεων. Λύσεις που βασίζονται στη σχέση

$$\Phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(t)dt \tag{24}$$

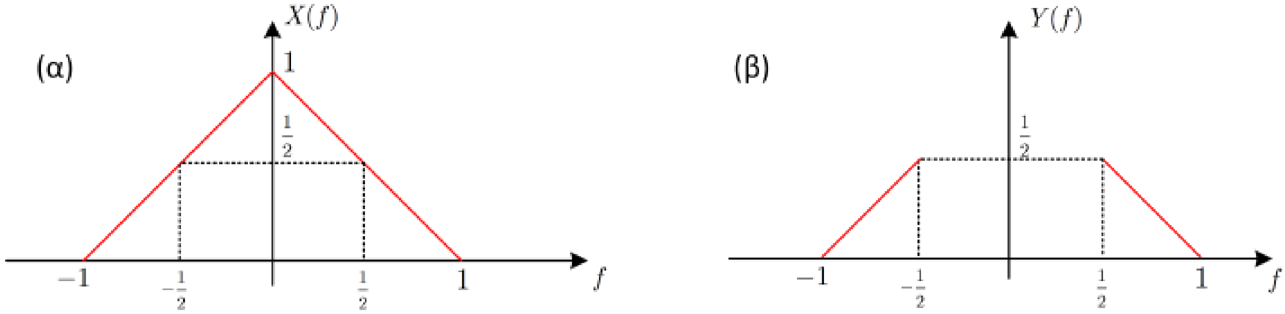
και υπολογίζουν τις επιφάνειες κάτω από τις γραφικές παραστάσεις θεωρούνται σωστές.

Θέμα 4 - Μετασχηματισμός Fourier
Θέμα της μορφής:

(α΄) Δείξτε ότι

$$F^{-1}\{\mathrm{sinc}^2(f) * \mathrm{sinc}(f)\} = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tri}(2t) \tag{25}$$

(β΄) Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Θέμα 4.*

Ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$ όπως στο Σχήμα (α). Έχετε στη διάθεση σας όλα τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων - επιλέξτε ένα από αυτά και χρησιμοποιήστε το για να αποκτήσετε από το $x(t)$ ένα νέο σήμα $y(t)$ με μετασχ. Fourier $Y(f)$ όπως στο Σχήμα (β). Βρείτε το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

Λύση: Αυτό το θέμα ήταν κοινό για όλους/ες και μάλλον το πιο δύσκολο θέμα της εξέτασης.

(α΄) Είναι

$$F^{-1}\{\mathrm{sinc}^2(f) * \mathrm{sinc}(f)\} = F^{-1}\{\mathrm{sinc}^2(f)\}F^{-1}\{\mathrm{sinc}(f)\} = \mathrm{tri}(t)\mathrm{rect}(t) \tag{26}$$

από γνωστά ζεύγη και από το γεγονός ότι συνέλιξη στη συχνότητα αντιστοιχεί σε γινόμενο στο χρόνο. Σχεδιάζοντας στο χαρτί το παραπάνω γινόμενο καταλήγετε στο ότι το σχέδιο που προκύπτει μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{1}{2}\mathrm{rect}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tri}(2t) \tag{27}$$

(β΄) Το σχήμα (β) μπορεί να προκύψει αν εφαρμόσουμε ένα υψιπερατό φίλτρο στο σχήμα (α) με συχνότητα αποκοπής $f_c = 1/2$ Hz. Το υψιπερατό φίλτρο θα είναι της μορφής

$$H_{hp}(f) = 1 - \mathrm{rect}(f) \longleftrightarrow h_{hp}(t) = \delta(t) - \mathrm{sinc}(t) \tag{28}$$

Θα είναι τότε

$$Y(f) = X(f)H(f) = \mathrm{tri}(f)H(f) \longleftrightarrow y(t) = \mathrm{sinc}^2(t) * (\delta(t) - \mathrm{sinc}(t)) \tag{29}$$

$$= \mathrm{sinc}^2(t) - \mathrm{sinc}^2(t) * \mathrm{sinc}(t) \tag{30}$$

Η συνέλιξη $\mathrm{sinc}^2(t) * \mathrm{sinc}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από το (α) ερώτημα. Ο μετασχ. Fourier της συνέλιξης είναι

$$F\{\mathrm{sinc}^2(t) * \mathrm{sinc}(t)\} = \mathrm{tri}(f)\mathrm{rect}(f) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(f) + \frac{1}{2}\mathrm{tri}(2f) \tag{31}$$

και από την ιδιότητα της δυικότητας και γνωστά ζεύγη θα είναι

$$\mathrm{sinc}^2(t) * \mathrm{sinc}(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(t) + \frac{1}{4}\mathrm{sinc}^2(t/2) \tag{32}$$

Οπότε τελικά

$$y(t) = \mathrm{sinc}^2(t) - \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(t) - \frac{1}{4}\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{t}{2}\Big) \tag{33}$$

Η απάντηση δεν είναι μοναδική - μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ένα ζωνοπερατό φίλτρο για τις απαιτήσεις της εκφώνησης - αλλά δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (α) ερώτημα για να το φέρετε σε μια κομψή απάντηση ως άθροισμα απλών σημάτων. Παρ' όλα αυτά, μια τέτοια λύση θεωρείται σωστή.

Θέμα 5 - Δειγματοληψία

Θέμα της μορφής: Όλα τα σήματα στη φύση είναι πεπερασμένης διάρκειας, άρα έχουν φασματικό περιεχόμενο άπειρης διάρκειας. Ως εκ τούτου, δεν μπορεί να οριστεί η μέγιστη συχνότητα μη μηδενικού πλάτους στο φάσμα τους. Για το γνωστό σας ζεύγος

$$A\mathrm{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}^2(fT)$$

μπορούμε να ορίσουμε ως μέγιστη συχνότητα τη συχνότητα του **τρίτου** θετικού μηδενισμού, $f = 3/T$, του φάσματος πλάτους του μετασχηματισμού, με το σκεπτικό ότι πάνω από το 95% της ενέργειας του σήματος βρίσκεται στο διάστημα $[-3/T, 3/T]$ Hz. Θέλουμε να δειγματοληπτήσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\phi_x(\tau) = \alpha\cos(2\pi\beta f_0\tau)\mathrm{tri}\Big(\frac{\gamma\tau}{\epsilon}\Big)$$

ενός σήματος $x(t)$. Με βάση τα παραπάνω, ποιός είναι ο ρυθμός Nyquist για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης;

Λύση: Για τον τριγωνικό παλμό θα έχουμε

$$\alpha\mathrm{tri}\Big(\frac{\gamma\tau}{\epsilon}\Big) \longleftrightarrow \alpha\frac{\epsilon}{\gamma}\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{\epsilon}{\gamma}f\Big) \tag{34}$$

ενώ για το συνημίτονο θα έχουμε

$$\cos(2\pi\beta f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f-\beta f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+\beta f_0) \tag{35}$$

από γνωστά ζεύγη. Το γινόμενο των παραπάνω θα είναι η συνέλιξη του μετασχ. Fourier τους, οπότε

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= \alpha\frac{\epsilon}{\gamma}\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{\epsilon}{\gamma}f\Big) * \Big(\frac{1}{2}\delta(f-\beta f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+\beta f_0)\Big) &(36)\\ &= \frac{\alpha}{2}\frac{\epsilon}{\gamma}\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{\epsilon}{\gamma}(f-\beta f_0)\Big) + \frac{\alpha}{2}\frac{\epsilon}{\gamma}\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{\epsilon}{\gamma}(f+\beta f_0)\Big) &(37)\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε δυο παλμούς $\mathrm{sinc}^2()$ γύρω από τις συχνότητες $f \pm \beta f_0$. Οι θετικοί μηδενισμοί για τον παλμό με κέντρο τη μεγαλύτερη συχνότητα ($f = \beta f_0$) θα γίνεται όταν

$$\sin\Big(\pi\frac{\epsilon}{\gamma}(f-\beta f_0)\Big) = 0 \Longleftrightarrow \sin\Big(\pi\frac{\epsilon}{\gamma}(f-\beta f_0)\Big) = \sin(\pi k) \Longrightarrow \pi\frac{\epsilon}{\gamma}(f-\beta f_0) = \pi k \tag{38}$$

$$f - \beta f_0 = \frac{k\gamma}{\epsilon} \tag{39}$$

$$f = \beta f_0 + \frac{k\gamma}{\epsilon} \tag{40}$$

με $k \in \mathbb{Z}_+$. Ο τρίτος θετικός μηδενισμός για τον παλμό αυτό συμβαίνει για $k = 3$, οπότε

$$f_3 = \beta f_0 + 3\frac{\gamma}{\epsilon} \tag{41}$$

Αυτή θα θεωρήσουμε ως μέγιστη συχνότητα του σήματος και άρα ο ρυθμός Nyquist θα είναι

$$2f_3 = 2\beta f_0 + 6\frac{\gamma}{\epsilon} \tag{42}$$

Θέμα 6 - Συνέλιξη

Θέμα της μορφής: Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = e^{-a(t+t_0)}u(t+t_0) \tag{43}$$

$$y(t) = e^{-b(t-t_0)}u(t-t_0) \tag{44}$$

με $a, b \in \mathbb{R}_+$, για διάφορες τιμές του t_0 που σας δόθηκαν.

Λύση: Μπορείτε να τη λύσετε με τρεις τρόπους: στο χρόνο (δε χρειάζεται γράφημα για τις περιπτώσεις, η αλγεβρική λύση θα σας βολέψει), στο χώρο του Fourier (αφού είναι σήματα ενέργειας), και στο χώρο του Laplace. Έστω ότι χρησιμοποιούμε το χώρο του Laplace. Είναι

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) \longleftrightarrow C_{xy}(s) = X(s)Y(s) \tag{45}$$

με

$$X(s) = L\{x(t)\} = \frac{1}{s+a}e^{st_0}, \;\; \sigma > -a \tag{46}$$

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \frac{1}{s+b}e^{-st_0}, \;\; \sigma > -b \tag{47}$$

οπότε

$$C_{xy}(s) = X(s)Y(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \tag{48}$$

με

$$A = C_{xy}(s)(s+a)\Big|_{s=-a} = \frac{1}{s+b}\Big|_{s=-a} = \frac{1}{b-a} \tag{49}$$

$$B = C_{xy}(s)(s+b)\Big|_{s=-b} = \frac{1}{s+a}\Big|_{s=-b} = \frac{1}{a-b} \tag{50}$$

Βλέπετε ότι τα $\pm t_0$ έχουν εξαφανιστεί - ουσιαστικά λοιπόν όλοι/ες είχατε την ίδια άσκηση, δηλ. πρέπει να καταλήξατε στο ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι

$$C_{xy}(s) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{s+a} + \frac{1}{a-b}\frac{1}{s+b} \tag{51}$$

και γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{b-a}e^{-at}u(t) + \frac{1}{a-b}e^{-bt}u(t) = \frac{1}{b-a}\Big(e^{-at} - e^{-bt}\Big)u(t) \tag{52}$$

Παραθέτω και τη λύση στο πεδίο του χρόνου για οποιαδήποτε τιμή του t_0. Είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(\tau+t_0)}u(\tau+t_0)e^{-b(t-\tau-t_0)}u(t-\tau-t_0)d\tau \tag{53}$$

$$= e^{-at_0}e^{-b(t-t_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}e^{b\tau}u(t-\tau-t_0)u(\tau+t_0)d\tau \tag{54}$$

$$= e^{-at_0-b(t-t_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}e^{b\tau}u(t-\tau-t_0)u(\tau+t_0)d\tau \tag{55}$$

Για το γινόμενο $u(t-\tau-t_0)u(\tau+t_0)$ έχουμε

$$u(\tau+t_0) = \begin{cases} 1, & \tau+t_0>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \tau>-t_0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{56}$$

$$u(t-\tau-t_0) = \begin{cases} 1, & t-\tau-t_0>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \tau<t-t_0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{57}$$

Έτσι,

$$c_{xy}(t) = e^{-at_0-b(t-t_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}e^{b\tau}u(t-\tau-t_0)u(\tau+t_0)d\tau \tag{58}$$

$$= e^{-at_0-b(t-t_0)}\int_{-t_0}^{t-t_0} e^{-a\tau}e^{b\tau}d\tau \tag{59}$$

$$= e^{-at_0-b(t-t_0)}\int_{-t_0}^{t-t_0} e^{(b-a)\tau}d\tau \tag{60}$$

$$= e^{-at_0-b(t-t_0)}\frac{1}{b-a}e^{(b-a)\tau}\Big|_{-t_0}^{t-t_0} \tag{61}$$

$$= \frac{1}{b-a}e^{-at_0-b(t-t_0)}\Big(e^{(b-a)(t-t_0)} - e^{-(b-a)t_0}\Big) \tag{62}$$

$$= \frac{1}{b-a}\Big(e^{(b-a)(t-t_0)-at_0-b(t-t_0)} - e^{-(b-a)t_0-at_0-b(t-t_0)}\Big) \tag{63}$$

$$= \frac{1}{b-a}\Big(e^{-at} - e^{-bt}\Big) \tag{64}$$

για $-t_0 < \tau < t-t_0 \iff t>0$, δηλ.

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{b-a}\Big(e^{-at} - e^{-bt}\Big)u(t) \tag{65}$$

Θέμα 7 - Σωστό ή λάθος;

Θέμα της μορφής: Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ με έναν πόλο στο $s=\alpha$ και έναν πόλο στο $s=\beta$, και κανέναν άλλο πόλο, τότε το σύστημα αυτό μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό. Τεκμηριώστε την απάντηση σας.

ή

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ με έναν πόλο στο $s=\alpha$ και έναν πόλο στο $s=\beta$, και κανέναν άλλο πόλο, τότε αν το σύστημα είναι ευσταθές θα είναι και αιτιατό. Τεκμηριώστε την απάντηση σας.

Λύση: Και τα δυο είδη εκφωνήσεων στοχεύουν να δουν αν γνωρίζετε τις έννοιες τις ευστάθειας και της αιτιατότητας σε σχέση με ένα διάγραμμα πόλων μηδενικών. Αν έχετε μόνο δυο πόλους α, β, τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

- Βρίσκονται και οι δυο στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο: το σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, αν επιλέξουμε πεδίο σύγκλισης $\sigma > \max\{\alpha,\beta\}$, καθώς αυτό είναι δεξιόπλευρο και περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Επίσης, αν το σύστημα είναι ευσταθές, δηλ. το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, τότε αναγκαστικά θα είναι και αιτιατό. Αυτό γιατί η περίπτωση της ευστάθειας είναι η $\sigma > \max\{\alpha,\beta\}$, που αποτελεί πεδίο σύγκλισης αιτιατού συστήματος.

- Βρίσκονται ο ένας στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και ο άλλος επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. στο $(0,0)$: το σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, καθώς υπάρχει πόλος επάνω στο φανταστικό άξονα. Μπορεί να είναι αιτιατό, αν $\sigma > 0$ αλλά δεν μπορεί να είναι ευσταθές σε καμία περίπτωση.

- Βρίσκονται ο ένας στο δεξί κι ο άλλος στο αριστερό ημιεπίπεδο. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, καθώς για την ευστάθεια απαιτείται η συμπερίληψη του φανταστικού άξονα στο πεδίο σύγκλισης. Τέτοιο πεδίο σύγκλισης είναι το $\min\{\alpha, \beta\} < \sigma < \max\{\alpha, \beta\}$, που αντιστοιχεί σε μη-αιτιατό (αμφίπλευρο) σήμα. Άρα αν είναι ευσταθές, δε θα είναι αιτιατό.

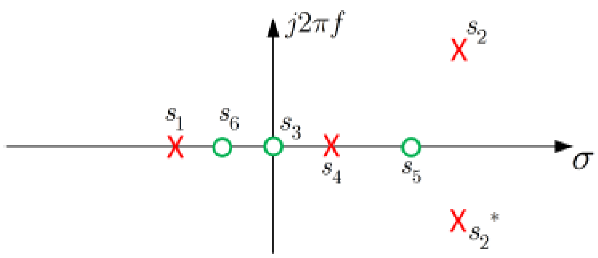
- Βρίσκονται ο ένας επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. στο $(0, 0)$, και ο άλλος στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο: το σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, καθώς υπάρχει πόλος επάνω στο φανταστικό άξονα. Μπορεί να είναι αιτιατό, αν $\sigma > \alpha$ (αν $\alpha \neq 0$) αλλά δεν μπορεί να είναι ευσταθές σε καμία περίπτωση.

- Βρίσκονται και οι δυο στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο: το σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, καθώς για να είναι ευσταθές θα επιλέξουμε πεδίο σύγκλισης $\sigma < \min\{\alpha, \beta\}$, καθώς αυτό είναι αριστερόπλευρο και περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Οπότε δεν μπορεί να είναι αιτιατό. Επίσης, αν το σύστημα είναι ευσταθές, δηλ. το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, τότε αναγκαστικά δε θα είναι και αιτιατό, για τους παραπάνω λόγους.

Η εκφώνηση που είχατε στα χέρια σας λύνεται μόνο με ένα από τα παραπάνω bullets. Απλώς η παραπάνω ανάλυση περιλαμβάνει την απάντηση για κάθε ζεύγος πραγματικών πόλων.

Θέμα 8 - Συστήματα στο Laplace I

Θέμα της μορφής: Σας δίνεται το ΓΧΑ σύστημα με διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος



(α΄) Ποιά τα πιθανά πεδία σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς;

(β΄) Υπάρχει σύστημα αιτιατό και ευσταθές με αυτό το διάγραμμα πόλων-μηδενικών; Εξηγήστε (χωρίς να το βρείτε).

(γ΄) Αν $H_i(s) = 1/H(s)$, με $H(s)$ τη συνάρτηση μεταφοράς της οποίας το διάγραμμα πόλων-μηδενικών σας δίνεται, βρίτε μια έκφραση για το $H_i(s)$.

ή

Αν μετατρέψετε τους πόλους σε μηδενικά και τα μηδενικά σε πόλους, υπάρχει σύστημα αιτιατό και ευσταθές με το διάγραμμα που προκύπτει; Εξηγήστε (χωρίς να το βρείτε).

Λύση: Υπήρχαν διαφορετικά διαγράμματα για τον καθένα σας, ενώ άλλαξε και το (γ) ερώτημα, αλλά ουσιαστικά εξετάζει το ίδιο πράγμα.

(α΄) Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα:

- $\sigma < s_1$
- $s_1 < \sigma < s_4$
- $s_4 < \sigma < \Re\{s_2\}$
- $\sigma > \Re\{s_2\}$

(β΄) Για να είναι ευσταθές, θα πρέπει να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας, οπότε τέτοιο πεδίο σύγκλισης είναι μόνο το $s_1 < \sigma < s_4$, το οποίο όμως αντιστοιχεί σε αμφίπλευρο/μη-αιτιατό σήμα, άρα δεν υπάρχει αιτιατό και ευσταθές σύστημα με αυτό το διάγραμμα.

(γ΄) Είναι

$$H(s) = A\frac{(s-s_6)(s-s_3)(s-s_5)}{(s-s_1)(s-s_4)(s-s_2)(s-s_2^*)} \tag{66}$$

και έτσι

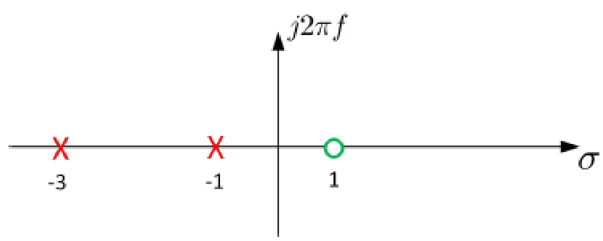
$$H_i(s) = 1/H(s) = \frac{1}{A}\frac{(s-s_1)(s-s_4)(s-s_2)(s-s_2^*)}{(s-s_6)(s-s_3)(s-s_5)} \tag{67}$$

ή

Αν αλλάξουμε τους πόλους με τα μηδενικά, τότε οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = s_6, s = s_3, s = s_5$. Αφού υπάρχει πόλος επάνω στο φανταστικό άξονα ($s = s_3$), το σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές σε καμία περίπτωση.

Θέμα 9 - Συστήματα στο Laplace II

Θέμα της μορφής: Σας δίνεται το ΓΧΑ σύστημα με διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος



για το οποίο σας δίνεται επιπλέον ότι $H(0) = \alpha$.

(α΄) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$.

(β΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος αν το σύστημα είναι αιτιατό/αντιαιτιατό/μη-αιτιατό.

(γ΄) Αν το σύστημα είναι αιτιατό/αντιαιτιατό/μη-αιτιατό, μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα από τη συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, εξηγήστε και υπολογίστε τη. Αν όχι, εξηγήστε.

Λύση: Οι πόλοι και τα μηδενικά άλλαζαν, καθώς και η τιμή του $H(0)$. Στα ερωτήματα, άλλαζε το ζητούμενο σύστημα με βάση την αιτιότητα.

(α΄) Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = c\frac{s-1}{(s+1)(s+3)} \tag{68}$$

ενώ το c βρίσκεται από την τιμή $H(0)$ ως

$$H(0) = c\frac{-1}{3} = \alpha \Longrightarrow c = -3\alpha \tag{69}$$

Άρα

$$H(s) = -3\alpha\frac{s-1}{(s+1)(s+3)} \tag{70}$$

(β΄) Για αιτιατό, αντι-αιτιατό, μη-αιτιατό σύστημα θα έχουμε πεδία σύγκλισης

- $\sigma > -1$
- $\sigma < -3$
- $-3 < \sigma < -1$

αντίστοιχα. Οι κρουστικές αποκρίσεις βρίσκονται από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα της συνάρτησης μεταφοράς και επιλέγοντας τα κατάλληλα πεδία σύγκλισης των επιμέρους κλασμάτων ώστε η τομή τους να δίνει τα παραπάνω πεδία σύγκλισης.

(γ΄) Για να μπορεί να υπολογιστεί η απόκριση σε συχνότητα, θα πρέπει το σύστημα να ειναι ευσταθές, δηλ. να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Αυτό συμβαίνει μόνο στην περίπτωση $\sigma > -1$, δηλ. όταν το σύστημα είναι αιτιατό. Τότε

$$H(s) = -3\alpha \frac{j2\pi f - 1}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f + 3)} \tag{71}$$

Θέμα 10 - Διαφορική Εξίσωση

Διάλεξη 17, Διαφάνειες 13-14. :)